Уважаемые студенты!

Задание:

1. Прочтите приведенный ниже конспект лекции.
2. Напишите конспект лекции в тетрадь объемом не менее 4-5 страниц рукописного текста.
3. Решите письменно приведенные ниже примеры для самостоятельной работы.
4. Конспект лекции и решенные примеры в письменном виде предоставить преподавателю по окончанию карантина.
5. Фотоотчет конспекта лекции предоставить на электронную почту hvastov@rambler.ru, при возникновении вопросов обращаться по телефону 0721098278 (WatsApp).

Лекция.

Тема: Определённый интеграл. Формула Ньютона - Лейбница.

План

1. Понятие определённого интеграла.
2. Основные свойства определённого интеграла.
3. Непосредственное вычисление определённого интеграла.

<u>Понятие определенного интеграла.</u>

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную на промежутке $a \le x \le b$. Разобьем этот отрезок на **n** частей точками $a = x_0 < x_1 < x_{21} < x_3 \ldots < x_n =$ b. Выберем на каждом из полученных частичных отрезков $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1,2,3,\ldots,n$ произвольным образом точку и обозначим их c_i, а длину отрезков через Δx_i и составим сумму:

$f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_1)\Delta x_1$, которая

называется ***интегральной суммой*** функции $f(x)$.

Очевидно эта сумма зависит от того как разбит отрезок $[a;b]$ и от того как выбраны точки c_i.

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремиться к нулю:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i ,$$

где число a называется **нижним пределом** интегрирования, число b называется **верхним пределом** интегрирования, отрезок $[a;b]$ - **отрезком интегрирования.**

Для любой функции $f(x)$ непрерывной на отрезке $[a;b]$, всегда существует определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

<u>Основный свойства определенного интеграла.</u>

Все свойства сформулированы в предложении, что рассматриваемые функции интегрируемы в соответствующих отрезках.

1. *Определенный интеграл с одинаковыми пределами равен нулю:*

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

2. *При перестановке пределов интегрирования знак интеграла меняется на противоположный:*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

3. *Отрезок интегрирования можно разбивать на части:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \text{ где } a < c < b.$$

4. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:*

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx.$$

5. *Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен такой же алгебраической сумме неопределенных интегралов от каждой функции:*

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$$

<u>Непосредственное вычисление определенного интеграла.</u>

Для вычисления определенного интеграла, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл, служит формула ***Ньютона-Лейбница:***

$$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx \,|_a^b = F(b) - F(a),$$

т.е. определенный интеграл равен разности значений любой первообразной функции при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Из этой формулы виден порядок вычисления определенного интеграла:

1) *Найти неопределенный интеграл от данной функции:*

2) *В полученную первообразную подставить вместо аргумента сначала верхний, затем нижний предел интеграла;*

3) *Из результата подстановки верхнего предела вычесть результат подстановки нижнего предела.*

ПРИМЕР 1. Вычислить интеграл $\int_{-\frac{1}{2}}^{4} xdx$.

Решение:

Применив указанное правило, вычислим данный интеграл:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{4} xdx = \frac{x^2}{2}\,|_{-\frac{1}{2}}^{4} = \frac{1}{2}x^2\Big|_{-\frac{1}{2}}^{4} = \frac{1}{2}\left(4^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(16 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{63}{4} = \frac{63}{8} = 7\frac{7}{8}.$$

ПРИМЕР 2. Вычислить интеграл $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Решение:

Воспользуемся определением степени с дробным и отрицательным показателем и вычислим определенный интеграл:

$$\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_1^8 x^{-\frac{2}{3}}dx = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\,|_1^8 = 3\sqrt[3]{x}\,|_1^8 = 3\left(\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{1}\right) = 3(2-1) = 3.$$

ПРИМЕР 3. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\sin x\right)dx$.

Решение:

Интеграл от разности функций заменим разностью интегралов от каждой функции:

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\sin x\right)dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}-\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin x dx=tgx\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}+\cos x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=tg\frac{\pi}{4}-tg\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{\pi}{4}-\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=1-(-1)+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=2$$

Контрольные вопросы:

1. Что такое определенный интеграл?
2. Перечислимте основные свойства определенного интеграла?
3. Напишите основные формулы интегрирования (табличные интегралы).
4. Что понимают под непосредственным интегрированием определенного интеграла?

<u>Упражнения</u>

1. $\int\limits_{1}^{4}\frac{dx}{3x-2}$ 2. $\int\limits_{0}^{2}3^x dx$ 3. $\int(1+2x+3x^2)dx$

4. $\int\limits_{2}^{9}\sqrt[3]{x-1}dx$ 5. $\int\limits_{1}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ 6. $\int\limits_{0}^{1}(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})dx$

7. $\int\limits_{1}^{8}\frac{2+5\sqrt[3]{x}}{x^3}$ 8. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^2 x}$ 9. $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{dx}{x}$

10. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{2^x-3^x}{6^x}dx$ 11. $\int\frac{e^x+e^{-1}}{e^{x-1}}dx$ 12. $\int\limits_{-2}^{-1}(x+\frac{1}{3x^5}+\frac{1}{2})dx$

13. $\int\limits_{0}^{1}(e^x+x)dx$ 14. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{2}\cos x+\sin x)dx$ 15. $\int\limits_{1}^{2}\frac{1+x^7}{x^6}dx$

16. $\int\limits_{1}^{16}(\sqrt{x}-2)dx$ 17. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{2\cos^2 x}$