Уважаемые студенты!

- Ознакомтесь с предложенным материал;
- Напишите ***краткий*** конспект (только, что касается arcsin, arccos, arctg, arcctg, ***с построениями***);
- Выполните домашнее задание в конце лекции.
- По вопросам обращаться 072-1098278 или hvastov@rambler.ru
- Фотоотчёт конспекта прислать в течение 3 дней со дня получения задания на hvastov@rambler.ru

Тема: Обратные функции, их графики. Обратные тригонометрические функции. Построение и чтение графиков функции.

(2 занятия)

Цель: Повторить известные функции и их обратные функции. Изучить обратные тригонометрические функции

Понятие обратной функции

Представьте, что вы гуляете по пляжу. На песке у кромки воды остаются ваши следы, а вокруг еще множество следов (см. рис. 1).

Рис. 1. Множество следов на песке

По их форме вы с легкостью можете определить, кто здесь был до вас: другой человек, чайка или собака. Видя след мы можем установить, что за существо его оставило. И наоборот: зная, кто прошел по песку, мы можем сказать, какой след останется. Мы как бы устанавливаем соответствие между следом и существом (см. рис. 2).

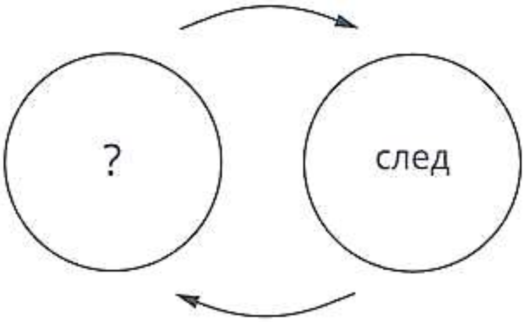

Рис. 2. Соответствие между следом и существом

Однозначное ли это соответствие? Давайте подумаем. Когда человек ступает на песок, он точно знает, какой след после него останется. Тут все однозначно. Представим обратную ситуацию: Шерлок Холмс видит на песке след. Может ли он однозначно определить преступника? Он сможет лишь утверждать, что это человек, а вот какой именно – без других улик это не определить, вариантов очень много. Обратное соответствие не является однозначным.

С неоднозначностью соответствия мы сталкиваемся, даже просто глядя на часы. Такое положение стрелок (см. рис. 3) может означать как полночь, так и полдень.

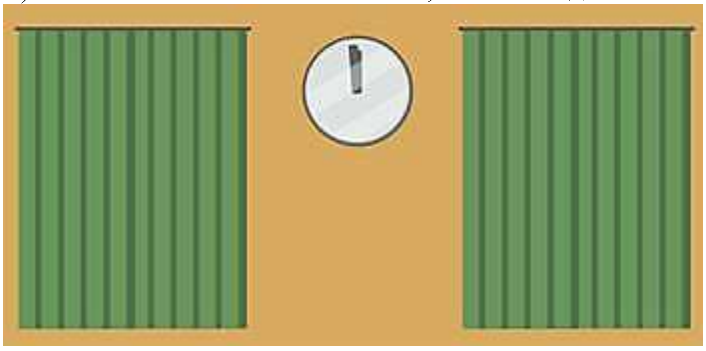

Рис. 3. Заданное положение стрелок

И если бы мы были в подвале без окон, то не смогли бы однозначно определить время – у нас было бы 2 варианта. Чтобы выбрать правильный вариант, мы пользуемся дополнительной информацией: смотрим, темно или светло на улице.

Но есть и примеры, когда мы можем однозначно установить соответствие. Так, у каждого человека есть ровно один внутренний паспорт и наоборот – внутренний паспорт однозначно определяет конкретного человека. Между внутренним паспортом и человеком можно установить взаимно однозначное соответствие.

Переходя на язык математики, можно сказать, что мы устанавливаем соответствия между множествами: множеством существ и множеством следов; множеством людей и множеством паспортов. Причем в одну сторону соответствие однозначное, а в обратную не всегда.

Таких примеров неоднозначности обратной операции можно привести много. Так, если нам известны два числа, найти их сумму не составит труда, например:

$33+25=58$

А вот зная сумму, восстановить однозначно два слагаемых не получится – вариантов будет бесконечно много:

$28+30=58$

$19+39=58$

$24+34=58$

$7+51=58$

...

С подобными примерами соответствий мы сталкивались, говоря о числовых функциях. Так, линейная функция $y=kx+b$ является примером взаимооднозначного соответствия (см. рис. 4). Каждому значению x соответствует ровно одно значение y. И наоборот: каждому значению y соответствует ровно одно значение x. Это похоже на соответствие паспортов и людей.

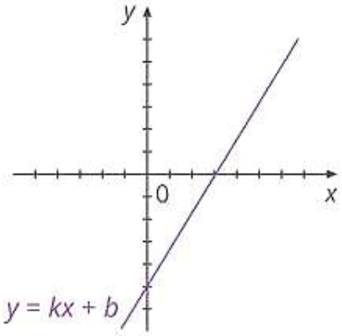

Рис. 4. График линейной функции

Ситуация с часами похожа на квадратичную функцию $y=x^2$ (см. рис. 5). По значению x мы однозначно определим y: $x=3$, тогда $y=9$. А вот если мы знаем y, например 4, то x однозначно определить нельзя, хотя информации у нас много, возможно всего два варианта: или -2, или 2. Однозначно мы можем узнать x только при наличии дополнительных условий. Например, если x – это сторона квадрата, тогда останется лишь один вариант $x=2$.

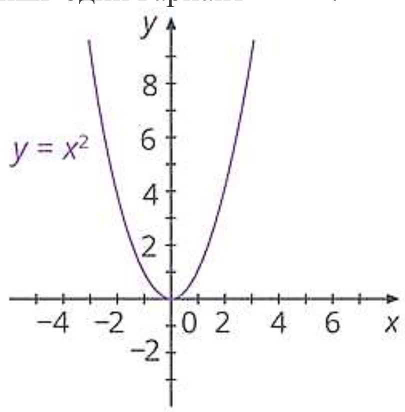

Рис. 5. График квадратичной функции

А вот многозначность, как в случае следов на песке, появляется при работе с тригонометрическими функциями (см. рис. 6). По значению аргумента x можно однозначно вычислить значение функций:

$y = \sin x$

$y = \cos x$

$y = \operatorname{tg} x$

$y = \operatorname{ctg} x$

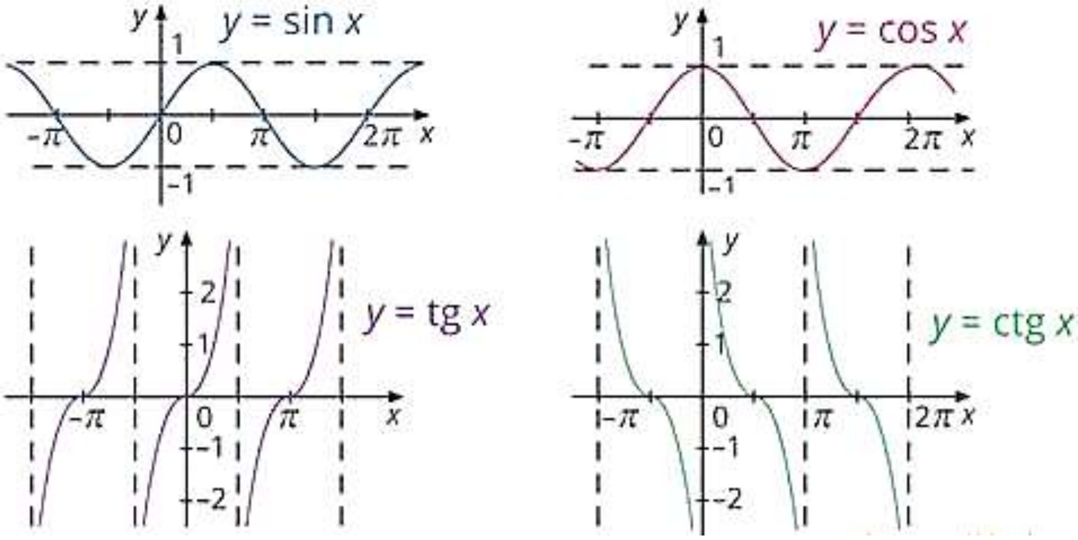

Рис. 6. Графики тригонометрических функций

Это мы уже умеем делать. А когда мы попробуем по значению y найти x, то столкнемся с многозначностью. Например, возьмем функцию $y = \sin x$. Если $y = 0$, то $x = 0$, ведь $\sin 0 = 0$. Но x может быть равен и 2π, и 4π, и $6\pi,$ и т. д. Ведь синусы всех этих величин также равны 0. О том, как в общем случае найти аргумент тригонометрической функции по ее значению, и пойдет речь в данном уроке.

Для начала разберемся с терминологией. Когда мы каждому значению x ставим в соответствие одно значение y – это **функция**. Можно сделать и обратное: поставить каждому значению y в соответствие значение x. Если мы сможем это сделать однозначно, то получим **обратную функцию**.

Возьмем, например, функцию $y = 5x + 7$ (см. рис. 7).

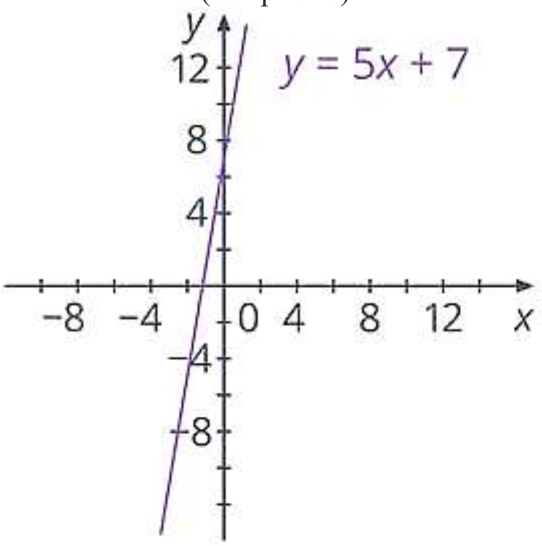

Рис. 7. График функции $y = 5x + 7$

Выразив переменную x, получаем:

$x = 0{,}2(y - 7)$

Здесь мы уже значению y ставим в соответствие x, то есть это обратная функция. Только у нее аргумент обозначен как y, а значение функции – как x. Нам же привычнее наоборот. Поэтому переобозначим: x заменим на y, а y – на x (см. рис. 8):

$y = 0{,}2(x - 7)$

Получили, что функция $y = 0{,}2(x - 7)$ является **обратной** функции $y = 5x + 7$. Верно и другое: функция $y = 5x + 7$ является обратной функции $y = 0{,}2(x - 7)$. Поэтому подобные пары функций называют еще **взаимно обратными**.

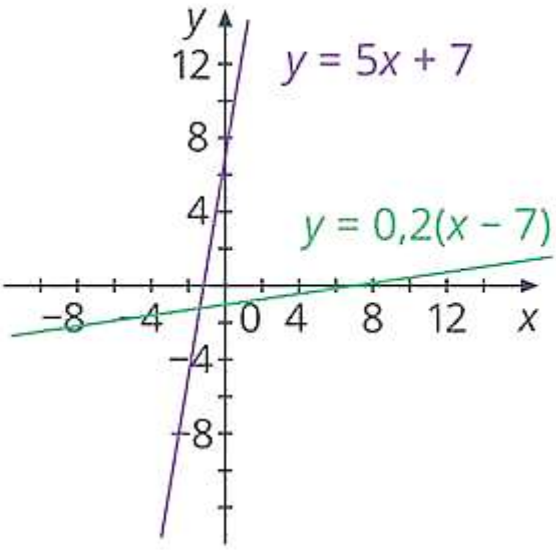

Рис. 8. Графики функций $y = 5x + 7$ и $y = 0{,}2(x - 7)$

Продолжаем разбираться с терминологией. Функцию, для которой можно найти обратную, называют **обратимой функцией**. Буквально – «ту, которую можно обратить». То есть функции $y = 5x + 7$, $y = 0{,}2(x - 7)$ являются обратимыми функциями. Да и в целом любая линейная функция является обратимой, ведь каждому значению y соответствует ровно одно значение x.

А вот функция $y = x^2$ не является обратимой, ведь значению функции y может соответствовать по два значения переменной x. Условие однозначности не выполнено. Чтобы сделать эту функцию обратимой, нужно добавить дополнительные условия. Так, если мы рассмотрим функцию $y = x^2$ только для положительных x, то каждому значению y будет уже соответствовать только одно значение x (см. рис. 9).

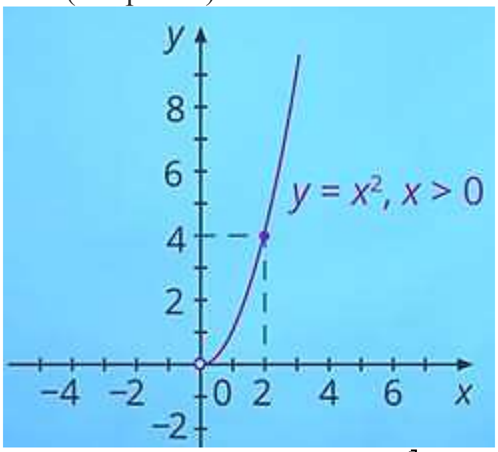

Рис. 9. График функции $y = x^2, x > 0$

Функция $y = x^2$, при $x > 0$ будет уже обратимой. И обратной к ней будет функция $y = \sqrt{x}$ (см. рис. 10) (см. в уроке тему «Обратная функция»).

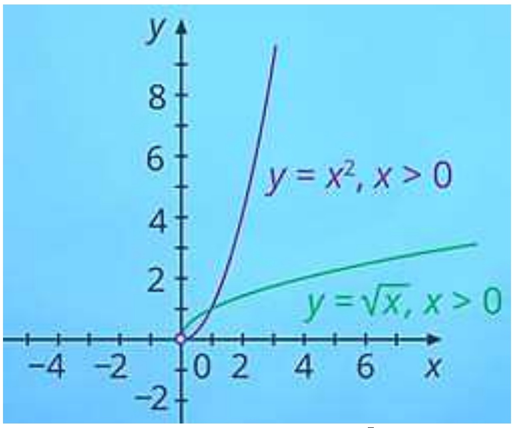

Рис. 10. Графики функций $y = x^2, x > 0$ и $y = \sqrt{x}$

Какие особенности у решения обратной задачи для тригонометрических функций?

Тригонометрические функции многозначны: они не являются обратимыми, ведь каждому значению y соответствует множество значений x. Это можно увидеть по графикам каждой из тригонометрических функций (см. рис. 11).

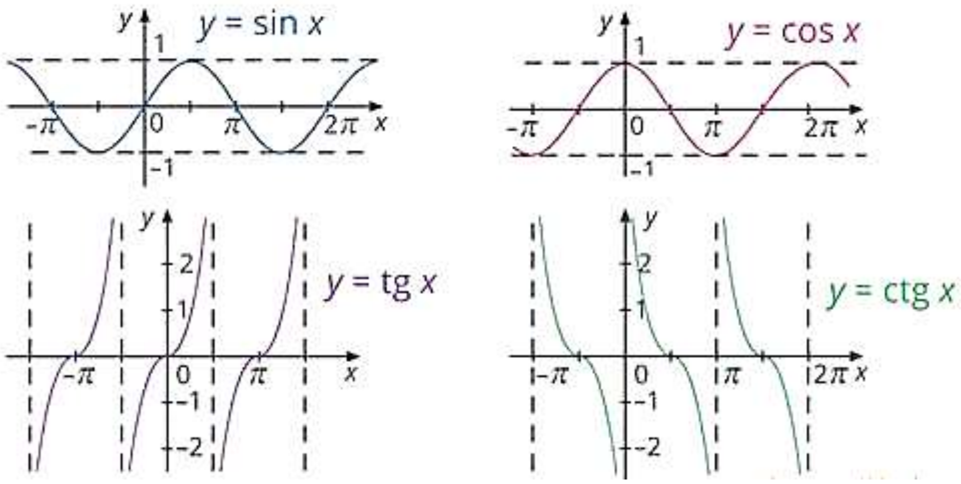

Рис. 11. Графики тригонометрических функций

Ранее мы уже сталкивались с обратной задачей. Например, при решении треугольника по значению косинуса мы находили угол:

$$\cos\alpha = 0{,}5 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

И там было все однозначно. Почему? Потому что было ограничение – это был острый угол от 0 до $\frac{\pi}{2}$. А когда мы говорим о расширенном понятии угла, как раз и появляется многозначность.

Например, на уроке физкультуры вам нужно пробежать 5 кругов по стадиону. В терминах углов – это 10π радиан. Когда учитель видит вас на финише, то он точно не может сказать, пробежали ли вы уже все 5 кругов, а может, 4, или 3, или даже вообще не начинали бежать. То есть по вашему положению нельзя однозначно определить «угол», который вы пробежали.

Решая обратную задачу в общем виде, нужно помнить об этой многозначности и учитывать все возможные варианты. Кроме многозначности, при решении тригонометрических уравнений нам понадобится ввести новые обозначения.

Новые числа мы получали при решении уравнений – называли (обозначали) решение уравнения новым числом, чтобы не использовать бесконечное количество цифр при записи. Вспомните: мы не могли решить уравнение $x^2 = 2$, записав x в виде обыкновенной дроби. Только приближенно: $x \approx \pm 1{,}4$ (см. в уроке тему «Иррациональные числа»). Поэтому ввели новое обозначение – квадратный корень: $x = \pm\sqrt{2}$.

С тригонометрическими функциями такая же ситуация. Для некоторых аргументов мы знаем значения функций:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1

И по значению функций сможем точно вычислить аргумент. А вот для остальных значений сможем вычислить лишь приближенно: с помощью калькулятора или таблиц Брадиса. Но для точной записи ответа потребуется ввести новые обозначения.

Какие именно это будут обозначения и как учесть многозначность, мы поговорим далее.

Арккосинус

Начнем с функции $y = \cos x$. Наша задача – по известному значению функции y найти все значения x. По сути, решить уравнение $y = \cos x$, где y задано, а x неизвестная. Чтобы не путать с функцией, для уравнения введем другие обозначения. Будем решать уравнение $\cos t = a$, где a задано, а t неизвестная.

Для начала учтем область значений косинуса: $-1 \leq \cos t \leq 1$. Значений t, при которых $\cos t > 1$ или $\cos t < -1$, не существует. Соответственно, при $a > 1$ и $a < -1$ уравнение не будем иметь решений.

Пример 1. Решить уравнение:

$\cos t = 0{,}5$

Решение

Для решения воспользуемся единичной окружностью. Косинус – это абсцисса точки на единичной окружности. Видим две точки, абсциссы которых равны $0{,}5$ – точки K и L (см. рис. 12).

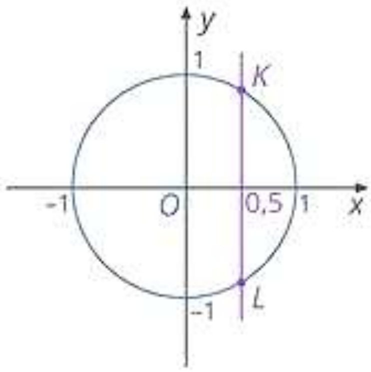

Рис. 12. Иллюстрация к примеру 1

Из таблицы значений мы знаем, что $\cos\frac{\pi}{3} = 0{,}5$. То есть точке K соответствует угол $\frac{\pi}{3}$. Тогда точке L соответствует угол $-\frac{\pi}{3}$, ведь $\angle AOL = \angle AOK$, но он отложен по часовой стрелке, то есть это отрицательный угол (см. рис. 13).

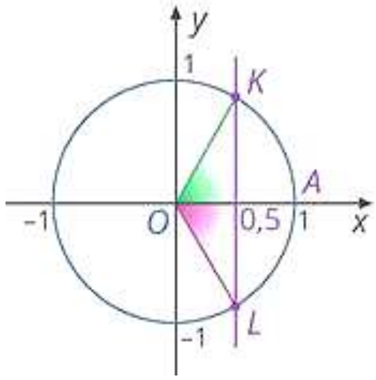

Рис. 13. Иллюстрация к примеру 1

Значит ли это, что уравнение имеет два решения?

$t_1 = \frac{\pi}{3}$

$t_2 = -\frac{\pi}{3}$

Не совсем. Мы уже говорили, что нужно учесть периодичность тригонометрических функций: каждой точке соответствует бесконечное множество углов, определенных с точностью до периода. Точке K соответствуют углы вида $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k \in Z$, точке L – углы вида $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k \in Z$. Получаем бесконечное множество решений уравнения:

$t = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ или $t = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$. Или сокращенно это записывают так:

$t = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$

Ответ: $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

Мы увидели, как описать все множество решений тригонометрического уравнения. Но при решении нам не пришлось вводить новых обозначений, ведь значение функции было табличным. Посмотрим, что же будет в обратном случае.

Пример 2. Решить уравнение:

$\cos t = 0{,}7$

Решение

Для решения снова воспользуемся единичной окружностью. Опять видим две точки, абсциссы которых равны $0{,}7$ (см. рис. 14).

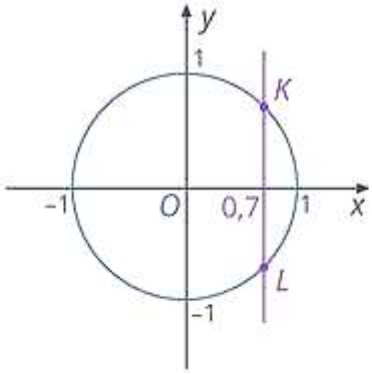

Рис. 14. Иллюстрация к примеру 2

В отличие от предыдущего примера мы не можем сразу определить, какому углу соответствует точка K (см. рис. 15).

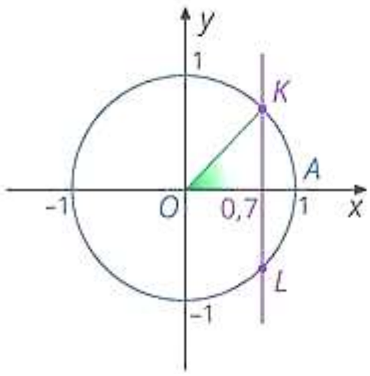

Рис. 15. Иллюстрация к примеру 2

В таблице точного значения нет, можно найти лишь приближенное. Чтобы точно обозначить величину $\angle AOK$, ввели специальное обозначение $t = \arccos 0{,}7$.То есть $\arccos 0{,}7$ – это величина такого $\angle AOK$, косинус которого равен $0{,}7$.

Более подробно о происхождении термина «арккосинус» вы можете узнать ниже.

Происхождение термина «арккосинус»

Первый корень термина «арккосинус», «арк-», происходит от латинского слова ***arcus***, что значит *дуга*, *арка*. Какое же отношение имеет дуга к понятию арккосинуса?

Согласно определению: арккосинус $0{,}7$ – это величина такого $\angle AOK$, косинус которого равен $0{,}7$. То есть значение арккосинуса мы определяем как величину угла. Из геометрии мы знаем, что длина дуги определяется как $l = \alpha R$, где α – величина центрального угла, на который опирается дуга, R – радиус (см. рис. 16).

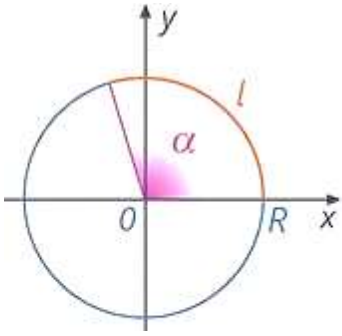

Рис. 16. Длина дуги определяется как $l = \alpha R$

$\angle AOK$ центральный, радиус окружности равен 1. Значит, численное значение длины дуги и величина $\angle AOK$ совпадают:

$\cup AK = \angle AOK \cdot R = \angle AOK \cdot 1 = \angle AOK$

Таким образом, мы можем дать альтернативное определение арккосинуса, оперируя понятием «дуга», а не «угол». Звучать оно будет так: арккосинус $0{,}7$ – это такое число, соответствующее длине дуги AK, что его косинус равен $0{,}7$.

С учетом периода точке K будут соответствовать углы вида $\arccos 0{,}7 + 2\pi k,\ k \in Z$, тогда точке L – углы вида $\arccos 0{,}7 + 2\pi k, k \in Z$.

Таким образом, корни уравнения $\cos t = 0{,}7$ можно записать следующим образом:

$t_1 = \arccos 0{,}7 + 2\pi k, k \in Z,$ или $t_2 = -\arccos 0{,}7 + 2\pi k, k \in Z$, или одной формулой:

$t = \pm \arccos 0{,}7 + 2\pi k, k \in Z$

Ответ: $\pm \arccos 0{,}7 + 2\pi k, k \in Z$.

В общем случае, решая уравнение $\cos t = a$, величину $\angle AOK$ мы будем обозначать как $\arccos a$. И будем получать решения уравнения: $t = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in Z$

Обратим внимание, что понятие арккосинуса мы ввели только для $-1 \le a \le 1$. А значения арккосинуса связаны с $\angle AOK$, величина которого изменяется от 0 (крайнее правое положение) до π (крайнее левое положение).

Теперь мы можем строго сформулировать **определение арккосинуса**: если $-1 \le a \le 1$, то $\arccos a$ – это такое число из отрезка $[0;\ \pi]$, косинус которого равен a:

$$\arccos a = t \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = a \\ 0 \le t \le \pi \end{cases}$$

Вернемся к решению уравнения $\cos t = a$. Общий вид его корней мы можем записать так: $t = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in Z$. Но в некоторых случаях это можно сделать и в другом виде. Если $\cos t = 0$ (см. рис. 17), то точке K соответствуют углы $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$. Для точки L углы мы можем записать как $t = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$.

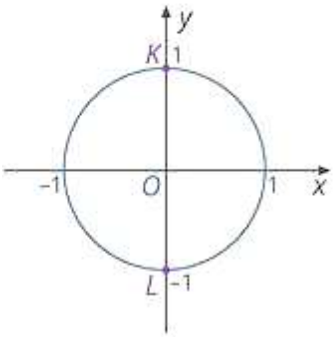

Рис. 17. Расположение точек K и L при $\cos t = 0$

В целом корнями уравнения будут $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{2}$ и т. д. В общем виде это можно записать так:
$t = \frac{\pi}{2} + \pi k,$

Если $\cos t = 1$, то точки K и L сходятся в одну (см. рис. 18). Ей соответствует нулевой угол $t = 0$. С учетом периода:
$t = 2\pi k, k \in Z$

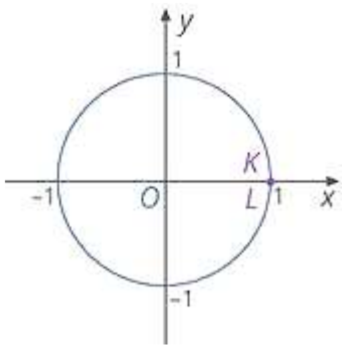

Рис. 18. Расположение точек K и L при $\cos t = 1$

Если $\cos t = -1$, тогда точки также сходятся в одну (см. рис. 19). Решения можно записать так:
$t = \pi + 2\pi k, k \in Z$

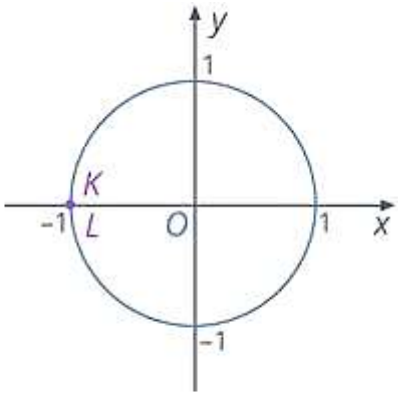

Рис. 19. Расположение точек K и L при $\cos t = -1$

По определению арккосинуса числа для каждого $x \in [-1; 1]$ определено одно значение $y = \arccos x$. Таким образом, на отрезке $[-1; 1]$ определена обратимая функция $y = \arccos x$.

Эта функция $y = \arccos x$ является обратной к функции $y = \cos x$, рассматриваемой на отрезке $[0; \pi]$. Для ее исследования вспомним, что график обратной функции симметричен графику исходной относительной прямой $y = x$ (см в уроке тему «Обратная функция»).

Поэтому для построения графика функции $y = \arccos x$ берем функцию $y = \cos x$ на отрезке $x \in [0; \pi]$ и отражаем симметрично относительно прямой $y = x$ (см. рис. 20).

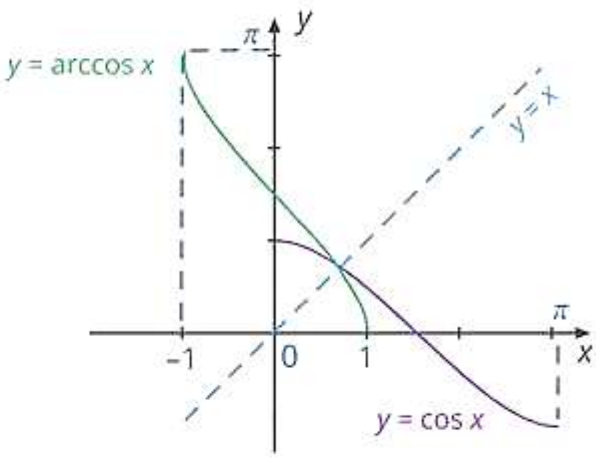

Рис. 20. График функции $y = \arccos x$

Глядя на график, перечислим основные свойства функции $y = \arccos x$:

1. Область определения $D(y) = [-1; 1]$.
2. Множество значений $E(y) = [0; \pi]$.
3. Функция убывающая.
4. Не является ни четной, ни нечетной. Это видно, из того, что график функции не симметричен ни относительно начала координат, ни относительно оси ординат. При этом для противоположных аргументов функции выполняется соотношение: $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$

С его доказательством вы можете ознакомиться в ниже.

Доказательство

Докажем, что для любого $a \in [-1; 1]$ выполняется равенство:

$\arccos a + \arccos(-a) = \pi$

Рассмотрим случай, когда $a > 0$, имея в виду, что противоположный случай для $a < 0$ доказывается аналогично.

Отметим $\arccos a$ на числовой окружности – это $\angle AOM$. Тогда $\angle AOP$ – это $\arccos(-a)$ (см. рис. 21).

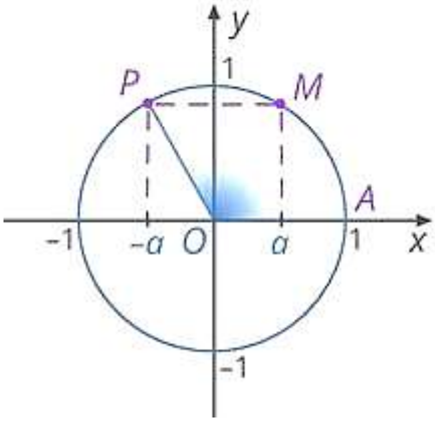

Рис. 21. Иллюстрация к доказательству

Дуги AM и PC симметричны относительно оси ординат, значит, длины этих дуг равны (см. рис. 22).

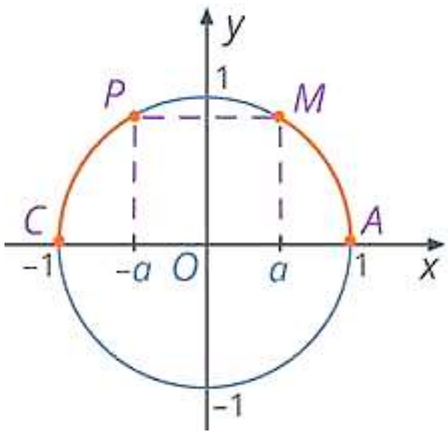

Рис. 22. Иллюстрация к доказательству

Тогда равны и центральные углы, на которые они опираются (см. рис. 23):

$\angle AOM = \angle POC$

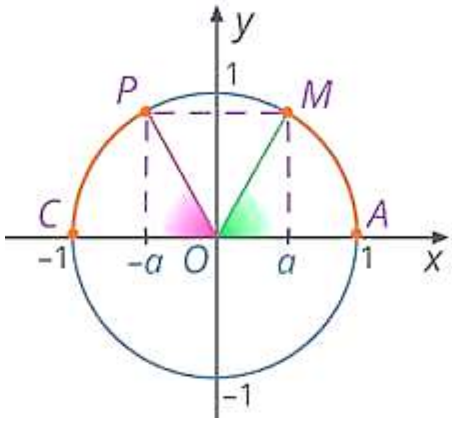

Рис. 23. Иллюстрация к доказательству

Тогда:

$\arccos a + \arccos(-a) = \angle AOM + \angle AOP = \angle POC + \angle AOP = \pi$

Удобнее полученное соотношение использовать в следующем виде:

$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$

Арксинус

Рассмотрим решение уравнений вида $\sin t = a$. Как и для косинусов, область значений синуса: $-1 \le \sin t \le 1$. Поэтому при $a > 1$ и $a < -1$ уравнение не будет иметь решений.

Пример 3. Решить уравнение:

$\sin t = 0{,}8$

Решение

Изобразим единичную окружность. Ординаты точек на окружности – это значения синусов соответствующих углов. Обозначим буквами K_1 и L_1 точки, ординаты которых равны $0{,}8$ (см. рис. 24).

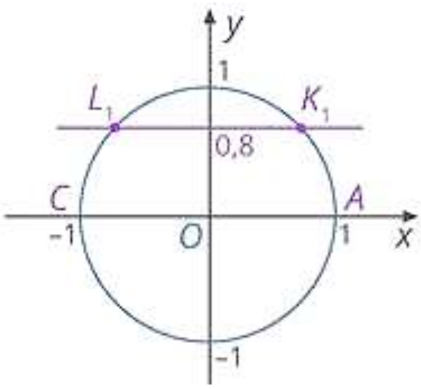

Рис. 24. Иллюстрация к примеру 3

Им соответствуют решения:

$t_1 = \angle AOK_1 + 2\pi k, k \in Z$

$t_2 = \angle AOL_1 + 2\pi k, k \in Z$

Заметим, что:

$\angle AOL_1 = \pi - \angle COL_1$

При этом (из симметрии):

$\angle COL_1 = \angle AOK_1$

Поэтому:

$\angle AOL_1 = \pi - \angle AOK_1$

По аналогии с косинусами для $\angle AOK_1$ введем новое обозначение $\arcsin 0{,}8$. То есть арксинус $0{,}8$ – это величина такого $\angle AOK_1$, что его синус равен $0{,}8$. Тогда решения уравнения можно записать так:

$t_1 = \arcsin 0{,}8 + 2\pi k, k \in Z$

$t_2 = \pi - \arcsin 0{,}8 + 2\pi k, k \in Z$

Ответ: $\arcsin 0{,}8 + 2\pi k, k \in Z$; $\pi - \arcsin 0{,}8 + 2\pi k, k \in Z$.

В общем случае, решая уравнение $\sin t = a$, величину $\angle AOK_1$ мы также будем называть арксинусом a и будем получать решения $t_1 = \arcsin 0{,}8 + 2\pi k, k \in Z$ и $t_2 = \pi - \arcsin 0{,}8 + 2\pi k, k \in Z$.

Как и для арккосинуса, понятие арксинуса имеет смысл только для $-1 \le a \le 1$. При этом значения арксинуса связаны с углом $\angle AOK_1$, величина которого изменяется от $-\frac{\pi}{2}$ (нижнее положение прямой) до $\frac{\pi}{2}$ (верхнее положение).

Сформулируем строгое **определение арксинуса**: если $-1 \le a \le 1$, то $\arcsin a$ – это такое число из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a:

$$\arcsin a = t \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = a \\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Вернемся к решению уравнения. Мы получили множество корней вида: $t_1 = \arcsin 0{,}8 + 2\pi k, k \in Z$ и $t_2 = \pi - \arcsin 0{,}8 + 2\pi k, k \in Z$. Их все можно объединить одной формулой:

$t = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z$

Подробнее об этом – ниже.

Решение уравнения в одной формуле

Для начала перепишем корни уравнения в следующем виде:

$t = \arcsin a + 2\pi k, k \in Z$

$t = -\arcsin a + \pi + 2\pi k, k \in Z$

В первом выражении для наглядности поменяем местами множители, а во втором – сгруппируем последние два слагаемых и вынесем π за скобки. Получим:

$t = \arcsin a + \pi \cdot 2k, k \in Z$

$t = -\arcsin a + \pi \cdot (2k + 1), k \in Z$

Можно заметить, что если перед $\arcsin a$ стоит знак «+», то множитель возле π – четное число $2k$, если же перед $\arcsin a$ стоит знак «–», то множитель π – нечетное число $(2k + 1)$. Это позволяет записать общее решение уравнения $\sin t = a$ в общем виде:

$t = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z$

Рассмотрим, почему эта более короткая формула включает в себя две предыдущие формы записи решения. Предположим, что n – четное число, то есть $n = 2k$. Тогда $(-1)^n$ будет положительным числом и корень уравнения примет вид $t = \arcsin a + 2\pi k, k \in Z$, что соответствует первому множеству решений. Если же n – нечетное число, то есть $n = 2k + 1$, то $(-1)^n$ будет отрицательным числом и корень уравнения будет записан так:

$t = -\arcsin a + (2k + 1) \cdot \pi, k \in Z$

$t = -\arcsin a + 2k \cdot \pi + \pi, k \in Z$

$t = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in Z$

А это уже описывает второе множество решений.

По определению арксинуса для каждого $x \in [-1; 1]$ определено одно значение $y = \arcsin x$. Таким образом, на отрезке $[-1; 1]$ задана обратимая функция $y = \arcsin x$.

При этом функция $y = \arcsin x$ является обратной к функции $y = \sin x$, рассматриваемой на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда свойства функции $y = \arcsin x$ можно получить из свойств функции $y = \sin x$ (см. рис. 25):

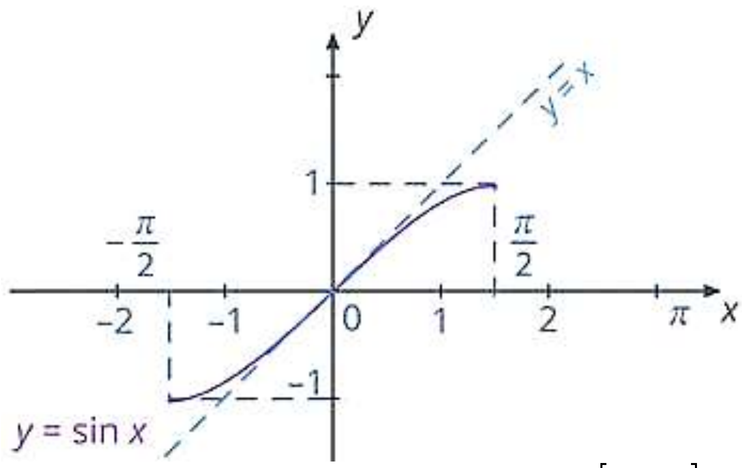

Рис. 25. График функции $y = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

1. График функции $y = \arcsin x$ симметричен графику функции $y = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, относительно прямой $y = x$ (см. рис. 26).

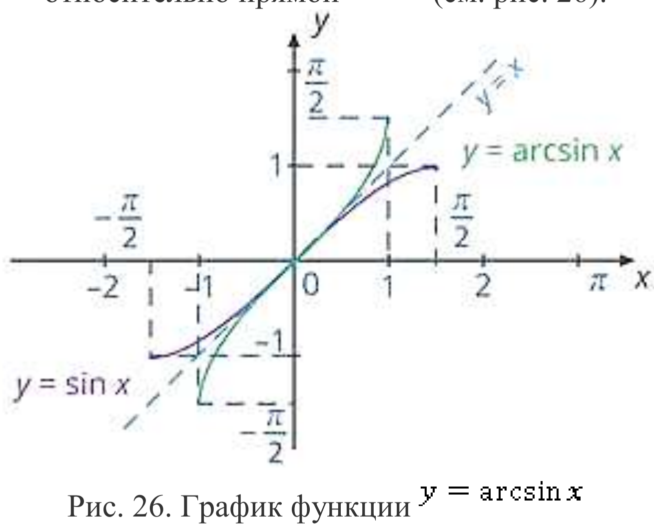

Рис. 26. График функции $y = \arcsin x$

2. Область определения $D(y) = [-1; 1]$.
3. Множество значений $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
4. Функция возрастающая.

5. Функция нечетная, поскольку ее график симметричен относительно начал координат. Соответственно, выполняется соотношение: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

Арктангенс и арккотангенс

Для решения уравнений $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$ воспользуемся графиками этих функций.

Пример 4. Решить уравнение:

$\operatorname{tg} x = 3$

Решение

Для решения используем графический метод (см. в уроке тему «Графический метод»). Решения этого уравнения – абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \operatorname{tg} x$ и прямой $y = 3$ (см. рис. 27).

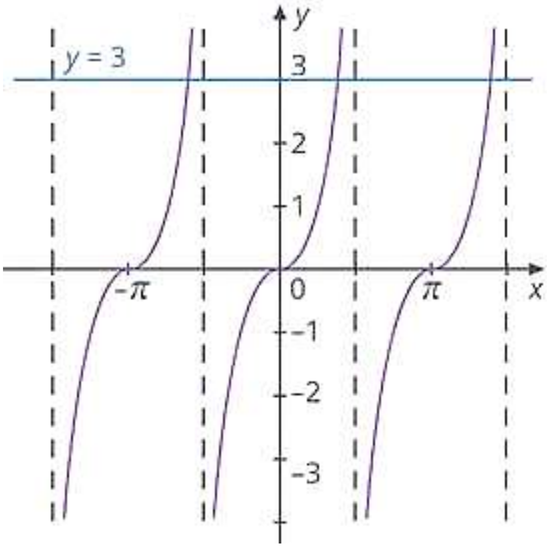

Рис. 27. Иллюстрация к примеру 4

Тут мы снова оказываемся в ситуации многозначности, ведь пересечение графиков – это бесконечное множество точек. Выберем одну из них – точку пересечения прямой с главной веткой тангенса. Абсциссу этой точки x_1 обозначим как $\operatorname{arctg} 3$. Тогда с учетом периодичности тангенса абсциссы всех остальных точек можно представить в виде (см. рис. 28):

$x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k, k \in Z$

Это и будет решением уравнения $\operatorname{tg} x = 3$.

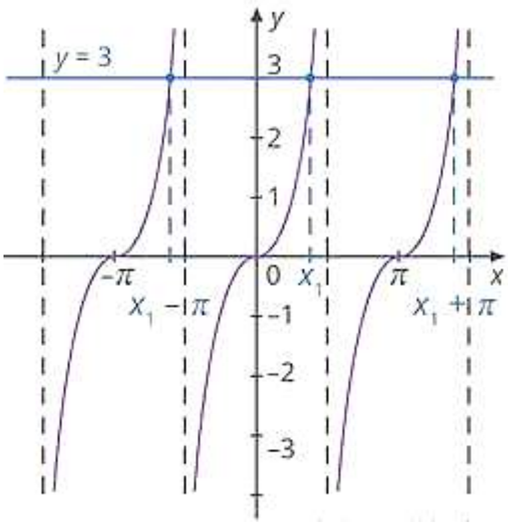

Рис. 28. Иллюстрация к примеру 4

Ответ: $\operatorname{arctg} 3 + \pi k, k \in Z$.

В общем случае, решая уравнение $\mathrm{tg}x = a$, будем аналогично обозначать абсциссу точки пересечения прямой с главной веткой тангенса как $\mathrm{arctg}\,a$. Обратим внимание, что тут ограничений на значение a не было – аргументом арктангенса может быть любое число. А вот значения лежат лишь на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, ведь именно в этих пределах находится главная ветка тангенса.

Строго **арктангенс** мы можем определить так: $\mathrm{arctg}\,a$ – это такое число из интервала $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a.

$$\mathrm{arctg}\,a = x \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{arctg}\,x = a, \\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

По определению арктангенса числа для каждого действительного x определено одно число $y = \mathrm{arctg}\,x$. Таким образом, на всей числовой прямой задана функция $y = \mathrm{arctg}\,x, x \in R$. Эта функция является обратной к функции $y = \mathrm{tg}\,x$, рассматриваемой на интервале $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

График функции $y = \mathrm{arctg}\,x$ получается из графика функции $y = \mathrm{tg}\,x, x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, симметрией относительно прямой $y = x$ (см. рис. 29).

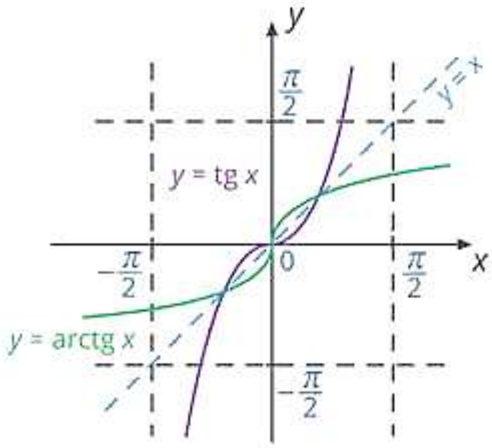

Рис. 29. График функции $y = \mathrm{arctg}\,x$

Выпишем свойства функции:

1. Область определения $D(y) = R$.
2. Множество значений $E(y) = \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.
3. Функция возрастающая.
4. Функция нечетная, поскольку график симметричен относительно начала координат: $\mathrm{arctg}(-a) = -\,\mathrm{arctg}\,a$

По аналогии с тангенсом решим уравнение $\mathrm{ctg}\,x = a$. Точки пересечения графиков – это бесконечное множество точек вида $x = x_1 + \pi k$, где x_1 – абсцисса точки пересечения прямой $y = a$ и главной ветви графика котангенса (см. рис. 30). Для этого числа x_1 вводим обозначение $\mathrm{arcctg}\,a$. Тогда все корни уравнения можно представить в виде:

$$x = \mathrm{arcctg}\,a + \pi k, k \in Z$$

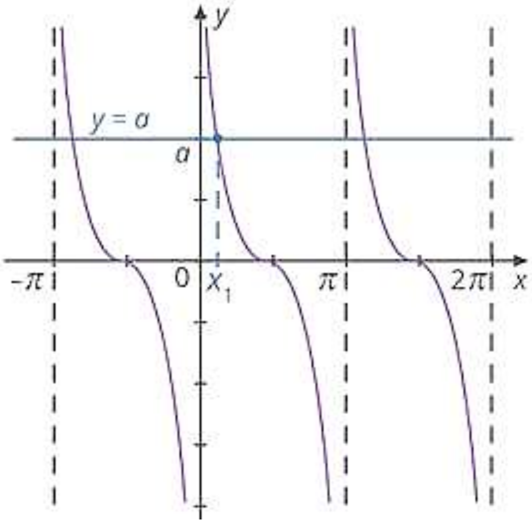

Рис. 30. Пересечение графиков $y = \operatorname{ctg} x$ и $y = a$

При этом арккотангенс может иметь любой аргумент. А вот его значения лежат в интервале $(0;\ \pi)$, ведь именно на этом интервале строится главная ветвь графика функции $y = \operatorname{ctg} x$.

Строгое **определение арккотангенса**: $\operatorname{arcctg} a$ – это такое число из интервала $(0;\ \pi)$, котангенс которого равен a:

$$\operatorname{arcctg} a = x \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{arcctg} x = a \\ 0 < x < \pi \end{cases}$$

Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ является обратной к функции $y = \operatorname{ctg} x$, рассматриваемой на интервале $x \in (0;\ \pi)$. График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ получается из графика функции $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0;\ \pi)$, симметрией относительно прямой $y = x$ (см. рис. 31).

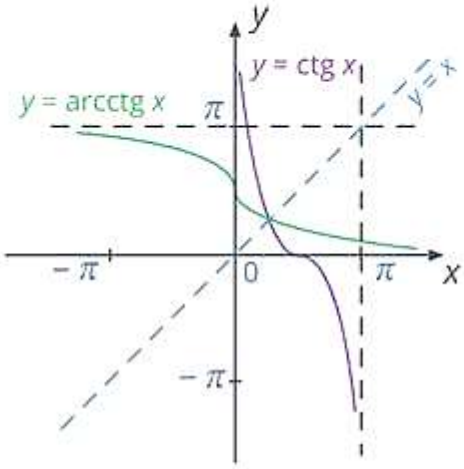

Рис. 31. График функции $y = \operatorname{arcctg} x$

Свойства функции:

1. Область определения $D(y) = R$.
2. Множество значений $E(y) = (0;\ \pi)$.
3. Функция убывающая.
4. Функция не является ни четной, ни нечетной: $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$

Преобразование выражений, содержащих обратные тригонометрические функции

Мы познакомились с новыми функциями, которые позволяют записать точное решение тригонометрических уравнений. Как и с любым новым введенным инструментом, мы должны научиться с ними работать. В частности – научиться упрощать выражения.

Главная идея работы с аркфункциями – использовать их определение. То есть то, что эквивалентные записи:

$$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y,\ y \in [0;\ \pi]$$

$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y, y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y, y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$y = \operatorname{arcctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{ctg} y, y \in (0; \pi)$

Для упрощения: обозначаем аркфункцию новой переменной и используем определение.

Задание 1. Найти значение выражения:

$\cos\left(\arccos\frac{3}{7}\right)$

Решение

Обозначим:

$\arccos\frac{3}{7} = t$

Заменяем в нашем выражении $\arccos\frac{3}{7}$ на t. Теперь наша задача – вычислить $\cos t$. По определению арккосинуса:

$\cos t = \frac{3}{7}, t \in [0; \pi]$

Таким образом:

$\cos\left(\arccos\frac{3}{7}\right) = \frac{3}{7}$

Ответ: $\frac{3}{7}$.

Пользуясь этим приемом, аналогично можно доказать и в общем виде подобные равенства:

$\cos(\arccos x) = x, \arccos x \in [0; \pi]$

$\sin(\arcsin x) = x, \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \operatorname{arctg} x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, \operatorname{arcctg} x \in (0; \pi)$

Задание 2. Найти значение выражения:

$\cos(\arcsin 0{,}8)$

Решение

Обозначим:

$\arcsin 0{,}8 = t$

Теперь нам нужно найти $\cos t$. По определению арксинуса: $\sin t = 0{,}8$, при $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Вычислим $\cos t$:

$\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$

$\cos^2 t = 1 - 0{,}64$

$\cos^2 t = 0{,}36$

$\cos t = 0{,}6$ или $\cos t = -0{,}6$

При $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ косинус принимает положительные значения (см. рис. 32), поэтому выбираем значение $\cos t = 0{,}6$.

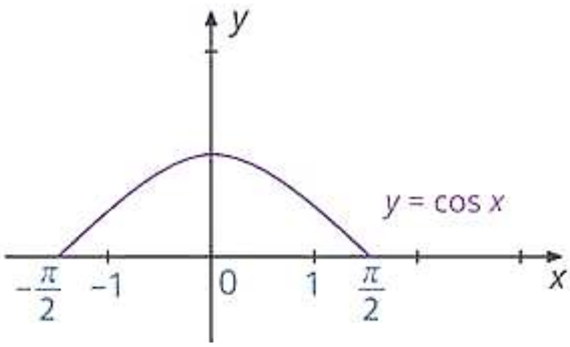

Рис. 32. Иллюстрация к заданию 2

Таким образом:

$\cos(\arcsin 0{,}8) = 0{,}6$

Ответ: $0{,}6$.

С еще одним заданием на преобразование выражений с аркфунциями вы можете ознакомиться ниже.

Пример

Задание. Найти значение выражения:

$\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, 7)$

Решение

Идея все та же – обозначаем аркфункцию новой переменной:

$\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, 7) = t$

Теперь наша задача – найти t. По определению:

$\mathrm{tg}\, t = \mathrm{tg}\, 7, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Из этого равенства можно было бы сделать вывод, что $t = 7$. Но он будет неправильным, поскольку $7 \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Значения тангенса будут равны в тех случаях, когда их аргументы отличаются на периоды: $t = 7 + \pi k, k \in Z$. Осталось подобрать такое целое значение k, для которого $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Для этого решим неравенство:

$$-\frac{\pi}{2} < 7 + \pi k < \frac{\pi}{2}$$
$$-\frac{\pi}{2} - 7 < \pi k < \frac{\pi}{2} - 7$$
$$-\frac{1}{2} - \frac{7}{\pi} < k < \frac{1}{2} - \frac{7}{\pi}$$

Вычислив приблизительные значения левой и правой части, получим:

$-2{,}7 < k < -1{,}7$

Под это неравенство подпадает единственное целое число -2. То есть $k = -2$. Тогда:

$t = 7 + \pi k = 7 - 2\pi$

Таким образом:

$\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, 7) = 7 - 2\pi$

Ответ: $7 - 2\pi$.

Домашнее задание

1. Решить уравнения:

$\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\mathrm{tg}\, t = \frac{1}{\sqrt{3}}$

2. Найти значения выражений:

$\sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right)$ $\quad$ $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$ $\quad$ $\mathrm{arctg}\left(\mathrm{ctg}\frac{5\pi}{6}\right)$