Задание

1. Записать все типовые задачи рассмотренные в лекции. Выполнить решение заданий для самостоятельного решения

2. Фотоотчет присылать на электронную почту

С уважением, Хвастова Светлана Ивановна

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721389311 (ватсап). Электронная почта: xvsviv@rambler.ru

Вычисление определенного интеграла. Примеры решений

И снова здравствуйте. На данном занятии мы подробно разберем некоторые методы вычисления определенного интеграла.

Для того чтобы научиться решать определенные интегралы необходимо:

1) Уметь находить неопределенные интегралы.

2) Уметь вычислить определенный интеграл.

В общем виде определенный интеграл записывается так:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Что прибавилось по сравнению с неопределенным интегралом? Прибавились *пределы интегрирования*.

Нижний предел интегрирования стандартно обозначается буквой a. *Верхний предел интегрирования* стандартно обозначается буквой b. Отрезок $[a;b]$ называется *отрезком интегрирования*.

Что такое определенный интеграл? Я бы мог вам рассказать про диаметр разбиения отрезка, предел интегральных сумм и т.д., но урок носит практический характер. Поэтому я скажу, что определенный интеграл – это ЧИСЛО. Да-да, самое что ни на есть обычное число.

Есть ли у определенного интеграла геометрический смысл? Есть. И очень хороший. Самая популярная задача – вычисление площади с помощью определенного интеграла.

Что значит решить определенный интеграл? Решить определенный интеграл – это значит, найти число.

Как решить определенный интеграл? С помощью знакомой со школы формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Формулу лучше переписать на отдельный листочек, она должна быть перед глазами на протяжении всего занятия.

Этапы решения определенного интеграла следующие:

1) Сначала находим первообразную функцию $F(X)$ (неопределенный интеграл). Обратите внимание, что константа C в определенном интеграле **никогда не добавляется**. Обозначение $\Big|_a^b$ является чисто техническим, и вертикальная палочка не несет никакого математического смысла, по сути – это просто отчёркивание. Зачем нужна сама запись $F(X)\Big|_a^b$? Подготовка для применения формулы Ньютона-Лейбница.

2) Подставляем значение верхнего предела в первообразную функцию: $F(b)$.

3) Подставляем значение нижнего предела в первообразную функцию: $F(a)$.

4) Рассчитываем (без ошибок!) разность $F(b) - F(a)$, то есть, находим число.

Готово.

Всегда ли существует определенный интеграл? Нет, не всегда.

Например, интеграла $\int_{-5}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ не существует, поскольку отрезок интегрирования $[-5;-2]$ не входит в область определения подынтегральной функции (значения под квадратным корнем не могут быть отрицательными).

А вот менее очевидный пример: $\int_{-2}^{3} tgx dx$. Такого интеграла тоже не существует, так как в точках $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ отрезка $[-2;3]$ не существует тангенса.

Для того **чтобы определенный интеграл вообще существовал, необходимо чтобы подынтегральная функция была <u>непрерывной</u> на отрезке интегрирования**.

Из вышесказанного следует первая важная рекомендация: перед тем, как приступить к решению ЛЮБОГО определенного интеграла, нужно убедиться в том, что подынтегральная функция **непрерывна на отрезке интегрирования**.

$\int_{-5}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2(\sqrt{x})\Big|_{-5}^{-2}$???! Нельзя подставлять отрицательные числа под корень! Изначальная невнимательность.

Если для решения (в контрольной работе, на зачете, экзамене) Вам предложен несуществующий интеграл вроде $\int_{-2}^{3} tgx dx$, то нужно дать ответ, что интеграла не существует и обосновать – почему.

Может ли определенный интеграл быть равен отрицательному числу? Может. И отрицательному числу. И нулю.

Может ли нижний предел интегрирования быть больше верхнего предела интегрирования? Может, и такая ситуация реально встречается на практике.

$\int_{6}^{0} (1-x)dx$ – интеграл преспокойно вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница.

Без чего не обходится высшая математика? Конечно же, без всевозможных свойств. Поэтому рассмотрим некоторые свойства определенного интеграла.

В определенном интеграле можно переставить верхний и нижний предел, сменив при этом знак:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Например, в определенном интеграле перед интегрированием $\int_6^0 (1-x)dx$ целесообразно поменять пределы интегрирования на «привычный» порядок:

$\int_6^0 (1-x)dx = -\int_0^6 (1-x)dx = \int_0^6 (x-1)dx$ – в таком виде интегрировать значительно удобнее.

Как и для неопределенного интеграла, для определенного интеграла справедливы свойства линейности:

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx, \text{ где } C = const$$

$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$ – это справедливо не только для двух, но и для любого количества функций.

В определенном интеграле можно проводить **замену переменной интегрирования**, правда, по сравнению с неопределенным интегралом тут есть своя специфика, о которой мы еще поговорим.

Для определенного интеграла справедлива **формула интегрирования по частям**:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Пример 1

Вычислить определенный интеграл $\int_1^2 2x^2 dx$

Решение:

$$\int_1^2 2x^2 dx \overset{(1)}{=} 2\int_1^2 x^2 dx \overset{(2)}{=} \frac{2}{3}(x^3)\Big|_1^2 \overset{(3)}{=} \frac{2}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{2}{3}\cdot 7 = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

(1) Выносим константу за знак интеграла.

(2) Интегрируем по таблице с помощью самой популярной формулы $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$. Появившуюся константу $\frac{1}{3}$ целесообразно отделить от x^3 и вынести за скобку. Делать это не обязательно, но желательно – зачем лишние вычисления?

(3) Используем формулу Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$. Сначала подставляем в x^3 верхний предел, затем – нижний предел. Проводим дальнейшие вычисления и получаем окончательный ответ.

<u>Пример 2</u>

Вычислить определенный интеграл $\int_1^5 \frac{7dx}{x}$

Это пример для самостоятельно решения, решение и ответ в конце урока.

Немного усложняем задачу:

<u>Пример 3</u>

Вычислить определенный интеграл $\int_{-2}^{4} (8 + 2x - x^2)dx$

Решение:

$$\int_{-2}^{4} (8 + 2x - x^2)dx \overset{(1)}{=} 8\int_{-2}^{4} dx + 2\int_{-2}^{4} xdx - \int_{-2}^{4} x^2 dx \overset{(2)}{=} 8(x)\Big|_{-2}^{4} + 2 \cdot \frac{1}{2}(x^2)\Big|_{-2}^{4} - \frac{1}{3}(x^3)\Big|_{-2}^{4} \overset{(3)}{=}$$

$$= 8(4 - (-2)) + (4^2 - (-2)^2) - \frac{1}{3}(4^3 - (-2)^3) = 8 \cdot 6 + (16 - 4) - \frac{1}{3}(64 + 8) =$$

$$= 48 + 12 - 24 = 36$$

(1) Используем свойства линейности определенного интеграла.

(2) Интегрируем по таблице, при этом все константы выносим – они не будут участвовать в подстановке верхнего и нижнего предела.

(3) Для каждого из трёх слагаемых применяем формулу Ньютона-Лейбница:

$$F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

СЛАБОЕ ЗВЕНО в определенном интеграле – это ошибки вычислений и часто встречающаяся ПУТАНИЦА В ЗНАКАХ. Будьте внимательны! Особое внимание заостряю на третьем слагаемом: $-\frac{1}{3}(4^3-(-2)^3) = -\frac{1}{3}(64+8)$ – первое место в хит-параде ошибок по невнимательности, очень часто машинально пишут $-\frac{1}{3}(4^3-(-2)^3) = -\frac{1}{3}(64-8)$ (особенно, когда подстановка верхнего и нижнего предела проводится устно и не расписывается так подробно). Еще раз внимательно изучите вышерассмотренный пример.

Следует заметить, что рассмотренный способ решения определенного интеграла – не единственный. При определенном опыте, решение можно значительно сократить. Например, я сам привык решать подобные интегралы так:

$$\int_{-2}^{4}(8+2x-x^2)dx = \left(8x+x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{4} =$$
$$= \left(32+16-\frac{64}{3}\right)-\left(-16+4+\frac{8}{3}\right) = \frac{80}{3}+\frac{28}{3} = 36$$

Здесь я устно использовал правила линейности, устно проинтегрировал по таблице. У меня получилась всего одна скобка с отчёркиванием пределов: $\left(8x+x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{4}$ (в отличие от трёх скобок в первом способе). И в «целиковую» первообразную функцию, я сначала подставил сначала 4, затем –2, опять же выполнив все действия в уме.

Какие недостатки у короткого способа решения? Здесь всё не очень хорошо с точки зрения рациональности вычислений, но лично мне всё равно – обыкновенные дроби я считаю на калькуляторе. Кроме того, существует повышенный риск допустить ошибку в вычислениях, таким образом, студенту-чайнику лучше использовать первый способ, при «моём» способе решения точно где-нибудь потеряется знак.

Несомненными преимуществами второго способа является быстрота решения, компактность записи и тот факт, что первообразная $8x+x^2-\frac{x^3}{3}$ находится в одной скобке.

Совет: перед тем, как использовать формулу Ньютона-Лейбница, полезно провести проверку: а сама-то первообразная найдена правильно?

Так, применительно к рассматриваемому примеру: перед тем, как в первообразную функцию $8x+x^2-\frac{x^3}{3}$ подставлять верхний и нижний пределы, желательно на черновике проверить, а правильно ли вообще найден неопределенный интеграл? Дифференцируем:

$$\left(8x+x^2-\frac{x^3}{3}\right)'=8(x)'+(x^2)'-\frac{1}{3}(x^3)'=8\cdot 1+2x-\frac{1}{3}\cdot 3x^2=8+2x-x^2$$

Получена исходная подынтегральная функция, значит, неопределенный интеграл найден верно. Теперь можно и формулу Ньютона-Лейбница применить.

Такая проверка будет не лишней при вычислении любого определенного интеграла.

Пример 4

Вычислить определенный интеграл $\int_{-3}^{1}(2x^2+3x-1)dx$

Это пример для самостоятельно решения. Попробуйте решить его коротким и подробным способом.

Замена переменной в определенном интеграле

Пример 5

Вычислить определенный интеграл $\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{xdx}{\sqrt{x^4+16}}$

Главный вопрос здесь вовсе не в определенном интеграле, а в том, как правильно провести замену. Смотрим в **таблицу интегралов** и прикидываем,

на что у нас больше всего похожа подынтегральная функция? Очевидно, что на длинный логарифм: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right| + C$. Но есть одна неувязочка, в табличном интеграле под корнем x^2, а в нашем – «икс» в четвёртой степени. Из рассуждений следует и идея замены – неплохо бы нашу четвертую степень как-нибудь превратить в квадрат. Это реально.

Сначала готовим наш интеграл к замене:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{x^4+16}} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2)^2+16}} = (*)$$

Из вышеуказанных соображений совершенно естественно напрашивается замена: $t = x^2$

Таким образом, в знаменателе будет всё хорошо: $\sqrt{t^2+16}$.

Выясняем, во что превратится оставшаяся часть xdx подынтегрального выражения, для этого находим дифференциал dt:

$$dt = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{dt}{2}$$

По сравнению с заменой в неопределенном интеграле у нас добавляется дополнительный этап.

Находим новые переделы интегрирования.

Это достаточно просто. Смотрим на нашу замену $t = x^2$ и старые пределы интегрирования $a = 0$, $b = \sqrt{3}$.

Сначала подставляем в выражение замены $t = x^2$ нижний предел интегрирования, то есть, ноль:

$$t_1 = 0^2 = 0$$

Потом подставляем в выражение замены $t = x^2$ верхний предел интегрирования, то есть, корень из трёх: $t_2 = (\sqrt{3})^2 = 3$

Готово. И всего-то лишь…

Продолжаем решение.

$$(*)\overset{(1)}{=}\frac{1}{2}\int_0^3\frac{dt}{\sqrt{t^2+16}}\overset{(2)}{=}\frac{1}{2}\left(\ln\left|t+\sqrt{t^2+16}\right|\right)\Big|_0^3\overset{(3)}{=}\frac{1}{2}\left(\ln\left(3+\sqrt{25}\right)-\ln\left(0+\sqrt{0+16}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(\ln 8-\ln 4)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{4}\right)=\frac{\ln 2}{2}\approx 0{,}35$$

(1) В соответствии с заменой **записываем новый интеграл с новыми пределами интегрирования**.

(2) Это простейший табличный интеграл, интегрируем по таблице. Константу $\frac{1}{2}$ лучше оставить за скобками (можно этого и не делать), чтобы она не мешалась в дальнейших вычислениях. Справа отчеркиваем линию с указанием новых пределов интегрирования $\Big|_0^3$ – это подготовка для применения формулы Ньютона-Лейбница.

(3) Используем формулу Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx=F(X)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$.

Ответ стремимся записать в максимально компактном виде, здесь я использовал свойства логарифмов.

Ещё одно отличие от неопределенного интеграла состоит в том, что, после того, как мы провели замену, **никаких обратных замен проводить не надо**.

А сейчас пара примеров для самостоятельного решения. Какие замены проводить – постарайтесь догадаться самостоятельно.

<u>Пример 6</u>

Вычислить определенный интеграл $\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\sin x dx}{\cos^2 x+1}$

<u>Пример 7</u>

Вычислить определенный интеграл $\int_1^2\frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$

Это примеры для самостоятельного решения. Решения и ответы в конце урока.

Метод интегрирования по частям в определенном интеграле

В формуле интегрирования по частям добавляются пределы интегрирования:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Формулу Ньютона-Лейбница здесь необходимо применить дважды: для произведения uv и, после того, как мы возьмем интеграл $\int_a^b v du$.

Тип интеграла для примера я опять подобрал такой, который еще нигде не встречался на сайте. Пример не самый простой, но очень и очень познавательный.

<u>Пример 8</u>

Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\pi/4} x tg^2 x dx$

Решаем.

$$\int_0^{\pi/4} x tg^2 x dx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = tg^2 x dx \Rightarrow v = \int tg^2 x dx = tgx - x$$

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

$$(*) \overset{(1)}{=} (x(tgx - x))\Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} (tgx - x) dx \overset{(2)}{=} \frac{\pi}{4} \cdot \left(tg\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) - 0 \cdot (tg0 - 0) - \int_0^{\pi/4} tgx dx + \int_0^{\pi/4} x dx \overset{(3)}{=}$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \ln|\cos x|\Big|_0^{\pi/4} + \frac{1}{2}(x^2)\Big|_0^{\pi/4} \overset{(4)}{=} \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16} + \ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| - \ln|\cos 0| + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{16} - 0^2\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln 1 + \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(1) Записываем решение в соответствии с формулой интегрирования по частям.

(2) Для произведения $x(tgx-x)$ применяем формулу Ньютона-Лейбница. Для оставшегося интеграла используем свойства линейности, разделяя его на два интеграла. **Не путаемся в знаках!**

(3) Берем два оставшихся интеграла.

(4) Применяем формулу Ньютона-Лейбница для двух найденных первообразных.

Далее ответ доводится «до ума». Повторюсь, будьте ПРЕДЕЛЬНО ВНИМАТЕЛЬНЫ при подстановках и заключительных вычислениях. Здесь допускают ошибки чаще всего.

Если честно, я недолюбливаю формулу $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$ и, по возможности, … обхожусь вообще без нее! Рассмотрим второй способ решения, с моей точки зрения он более рационален.

Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\pi/4} xtg^2xdx$

На первом этапе я нахожу неопределенный интеграл: $\int xtg^2xdx = (*)$

Интегрируем по частям:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = tg^2xdx \Rightarrow v = \int tg^2xdx = tgx - x$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$(*) = x(tgx-x) - \int (tgx-x)dx = xtgx - x^2 - \int tgxdx + \int xdx =$$

$$= xtgx - x^2 + \ln|\cos x| + \frac{x^2}{2} = xtgx - \frac{x^2}{2} + \ln|\cos x|$$

Первообразная функция найдена. Константу C в данном случае добавлять не имеет смысла.

В чём преимущество такого похода? Не нужно «таскать за собой» пределы интегрирования, действительно, замучаться можно десяток раз записывать мелкие значки пределов интегрирования

На втором этапе я провожу проверку (обычно на черновике).

Тоже логично. Если я неправильно нашел первообразную функцию, то неправильно решу и определенный интеграл. Это лучше выяснить немедленно, дифференцируем ответ:

$$\left(xtgx-\frac{x^2}{2}+\ln|\cos x|\right)'=(x)'tgx+x(tgx)'-\frac{1}{2}(x^2)'+(\ln|\cos x|)'=$$

$$=1\cdot tgx+x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{2}\cdot 2x+\frac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)'=tgx+\frac{x}{\cos^2 x}-x-\frac{\sin x}{\cos x}=$$

$$=tgx+\frac{x}{\cos^2 x}-x-tgx=\frac{x}{\cos^2 x}-x=\frac{x(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}=\frac{x\sin^2 x}{\cos^2 x}=xtg^2 x$$

Получена исходная подынтегральная функция, значит, первообразная функция найдена верна.

Третий этап – применение формулы Ньютона-Лейбница.

$$\int_0^{\pi/4} xtg^2 x dx=\left(xtgx-\frac{x^2}{2}+\ln|\cos x|\right)\Big|_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{4}tg\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{32}+\ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right|-\left(0\cdot tg0-\frac{0^2}{2}+\ln\cos 0\right)=$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{32}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-(0-0+0)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{32}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

И здесь есть существенная выгода! В «моём» способе решения гораздо меньший риск запутаться в подстановках и вычислениях – формула Ньютона-Лейбница применяется всего лишь один раз. Если чайник решит подобный интеграл по формуле $\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$ (первым способом), то стопудово где-нибудь допустит ошибку.

Рассмотренный алгоритм решения можно применить для любого определенного интеграла.

Уважаемый студент, распечатай и сохрани:

Что делать, если дан определенный интеграл, который кажется сложным или не сразу понятно, как его решать?

1) Сначала находим неопределенный интеграл (первообразную функцию). Если на первом же этапе случился облом, дальше рыпаться с Ньютоном и Лейбницем бессмысленно. Путь только один – повышать свой уровень знаний и навыков в решении неопределенных интегралов.

2) Проверяем найденную первообразную функцию дифференцированием. Если она найдена неверно, третий шаг будет напрасной тратой времени.

3) Используем формулу Ньютона-Лейбница. Все вычисления проводим ПРЕДЕЛЬНО ВНИМАТЕЛЬНО – тут самое слабое звено задания.

И, на закуску, интеграл для самостоятельного решения.

<u>Пример 9</u>

Вычислить определенный интеграл $\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx$

Решение и ответ где-то рядом.

<u>Желаю успехов!</u>

Решения и ответы:

Пример 2: Решение:

$$\int_1^5 \frac{7dx}{x} = 7\int_1^5 \frac{dx}{x} = 7(\ln x)\Big|_1^5 = 7(\ln 5 - \ln 1) = 7(\ln 5 - 0) = 7\ln 5$$

Пример 4: Решение:

$$\int_{-3}^{1} (2x^2 + 3x - 1)dx = \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x\right)\Big|_{-3}^{1} =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 1 - \left(-18 + \frac{27}{2} + 3\right) = \frac{7}{6} + \frac{3}{2} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

Пример 6: Решение:

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\cos^2 x + 1} = (*)$$

Проведем замену переменной: $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx \Rightarrow \sin x dx = -dt$,

Новые переделы интегрирования:

$$t_1 = \cos\frac{\pi}{2} = 0;$$

$$t_2 = \cos\pi = -1$$

$$(*) = -\int_0^{-1} \frac{dt}{t^2+1} = \int_{-1}^{0} \frac{dt}{t^2+1} = (arctg(t))\Big|_{-1}^{0} = arctg0 - arctg(-1) = 0 + arctg1 = \frac{\pi}{4}$$

Примечания: В рассмотренном интеграле – как раз тот случай, когда уместно применить свойство определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Пример 7: Решение:

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$$

Замена: $t = \frac{1}{x} \Rightarrow dt = -\frac{dx}{x^2} \Rightarrow \frac{dx}{x^2} = -dt$

Новые пределы интегрирования:

$$t_1 = \frac{1}{1} = 1, \quad t_2 = \frac{1}{2}$$

$$(*) = -\int_{1}^{1/2} e^t dt = \int_{1/2}^{1} e^t dt = (e^t)\Big|_{1/2}^{1} = e^1 - e^{\frac{1}{2}} = e - \sqrt{e}$$

Пример 9: Решение:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x dx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$$u = \arccos 2x \Rightarrow du = -\frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}}$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

$$(*) = (x \arccos 2x)\Big|_{-1/2}^{1/2} + 2\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \left(\frac{1}{2}\arccos 1 + \frac{1}{2}\arccos(-1)\right) - \frac{1}{4}\int_{-1/2}^{1/2} \frac{d(1-4x^2)}{\sqrt{1-4x^2}} =$$

$$= \frac{0}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-4x^2}\right)\Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(0-0) = \frac{\pi}{2}$$