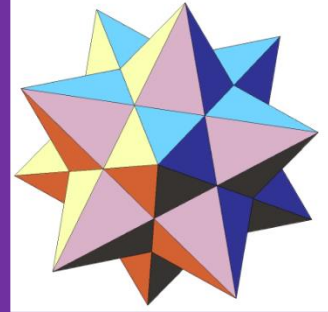


Уважаемые студенты!

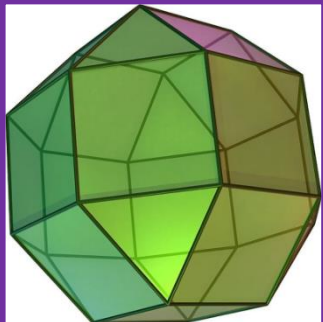
- Вам необходимо разобрать теоретический материал;
- Для закрепления изученного материала вы должны решить задачи в конце лекции;
- Фотоотчет конспекта лекции предоставить на электронную почту [hvastov@rambler.ru](mailto:hvastov@rambler.ru), при возникновении вопросов обращаться по телефону 0721098278 (WatsApp).



# Многогранники

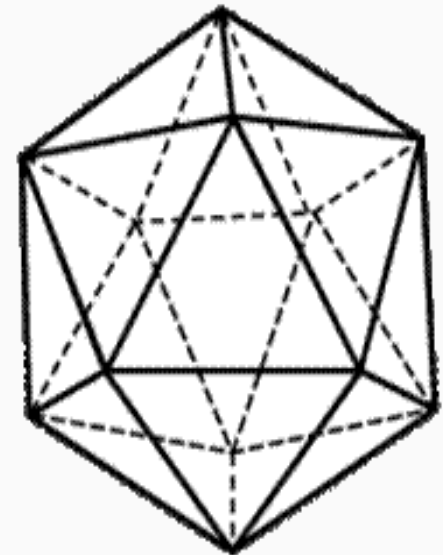
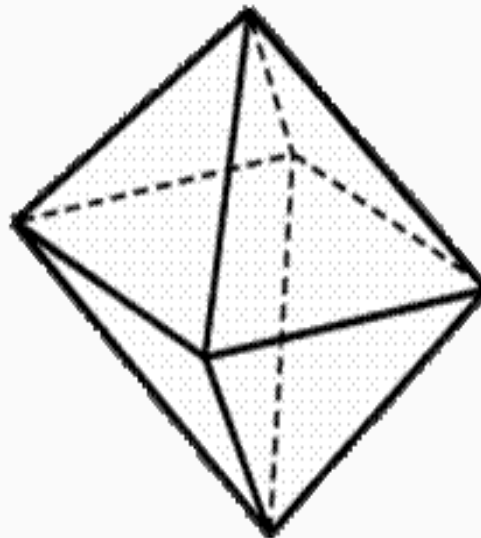
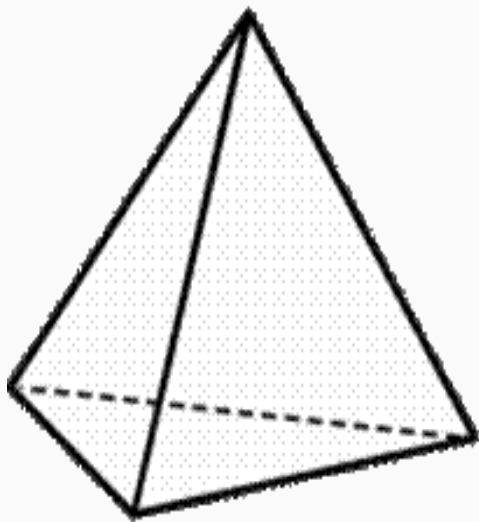
## План

1. Призма.
2. Прямая и наклонная.
3. Параллелепипед. Куб.



# Понятие многогранника

**Определение.** Поверхность, составленная из многоугольников и ограничивающая некоторое геометрическое тело, называется многогранником.

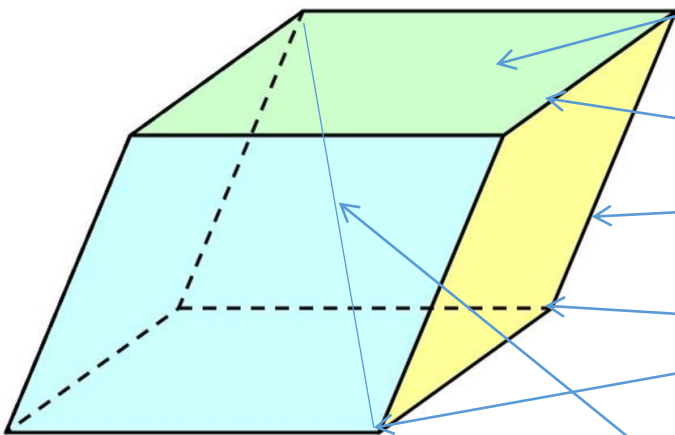


# Понятие многогранника

Многоугольники, из которых составлен многогранник, называются его *гранями*.

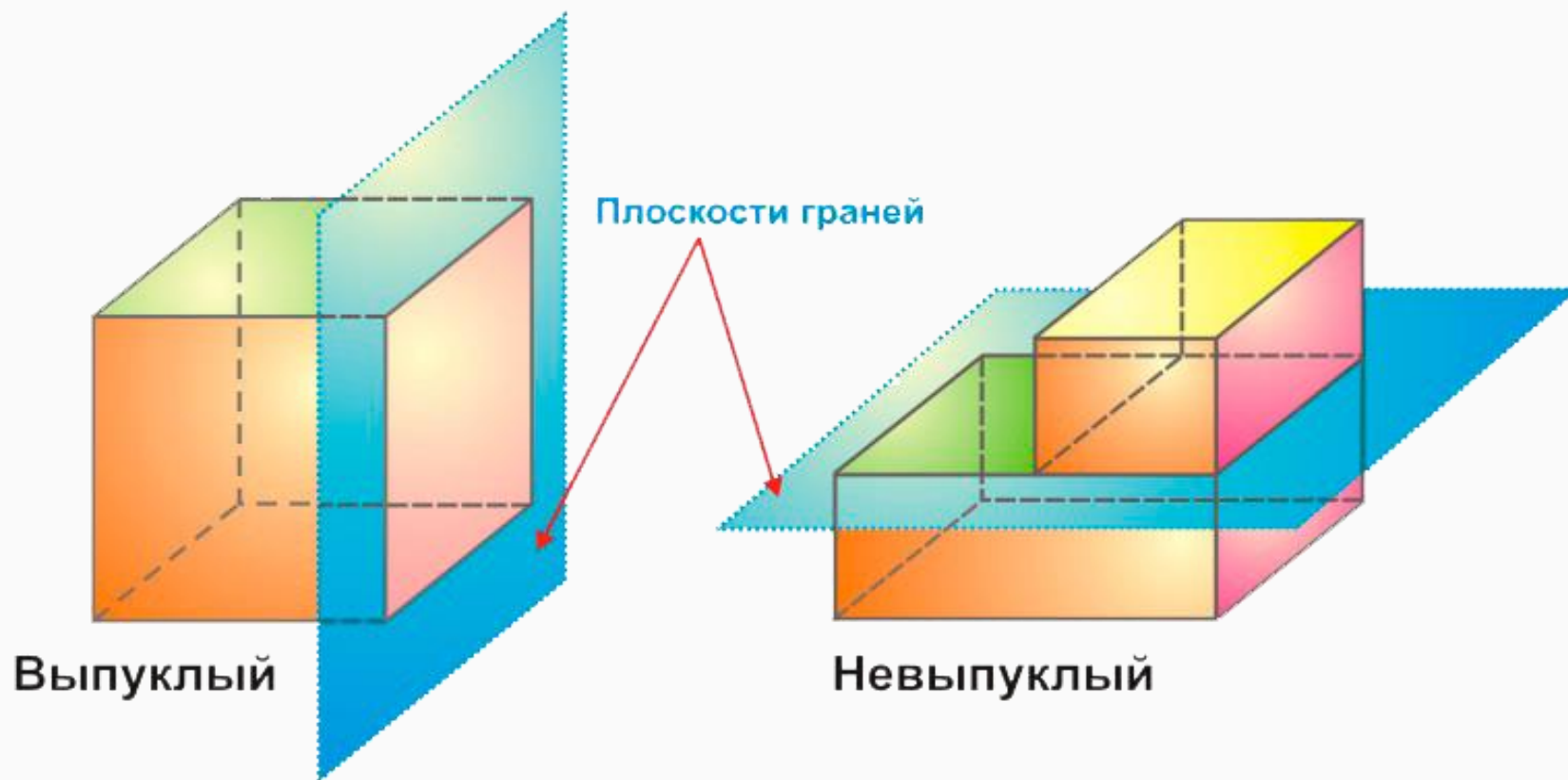
Стороны граней называются *рёбрами*, а концы рёбер - *вершинами* многогранника.

Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется *диагональю* многогранника.

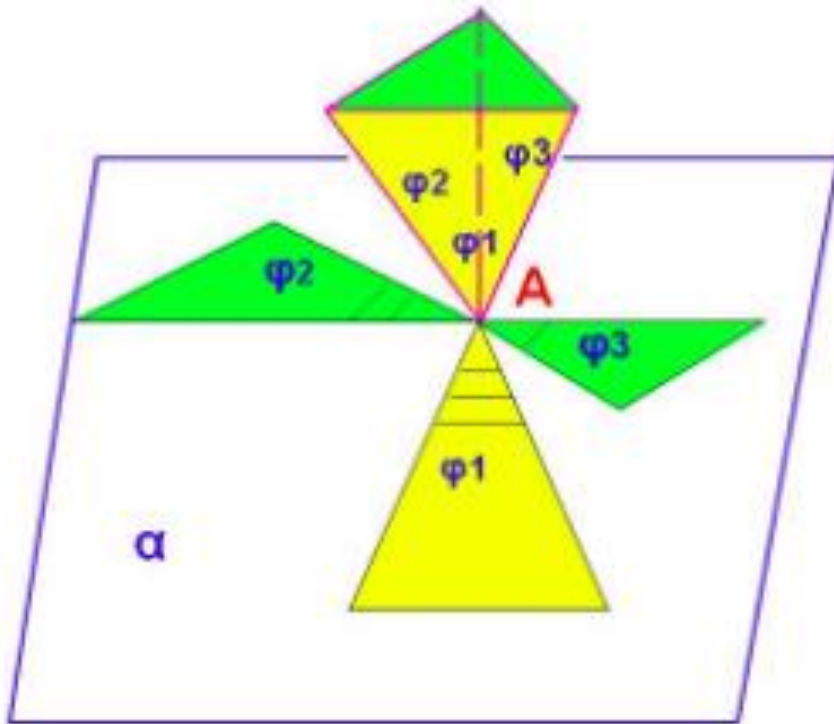


# Многогранники бывают *выпуклые* и *невыпуклые*.

Многогранник называется выпуклым, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани.



**В выпуклом многограннике сумма всех плоских углов при каждой его вершине меньше  $360^\circ$ .**

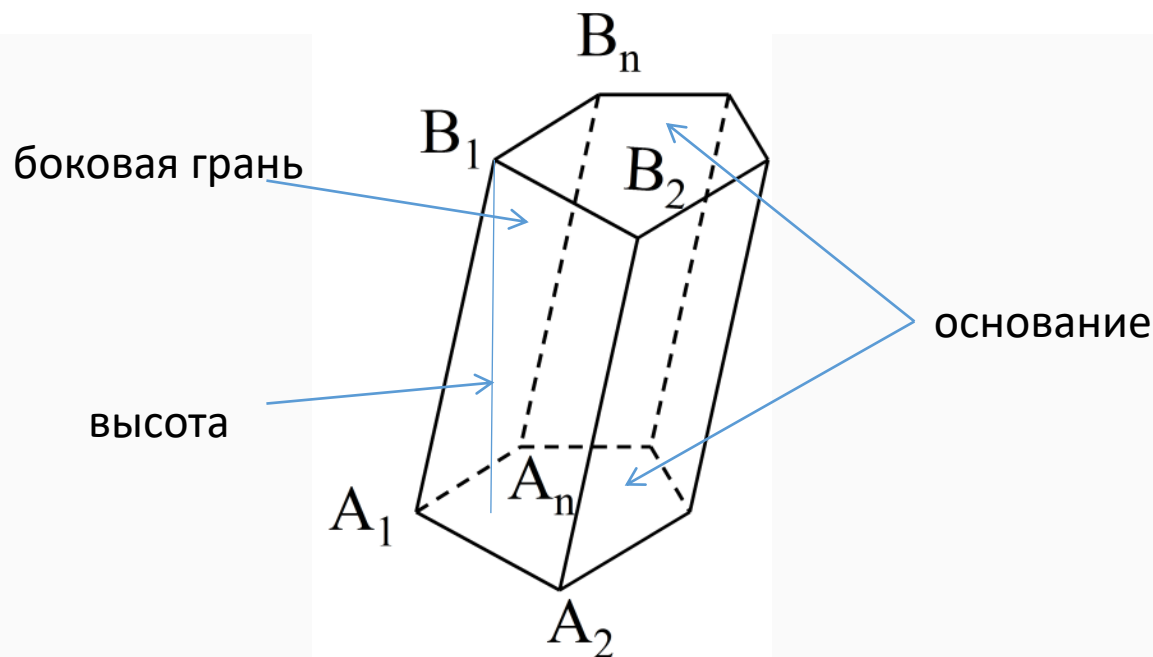


Многогранник «разрезан» вдоль ребер и все его грани с общей вершиной A развернуты так, что оказались расположенными в одной плоскости  $\alpha$ .

Видно, что сумма всех плоских углов при вершине A, т. е.  $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$ , меньше  $360^\circ$

# Призма

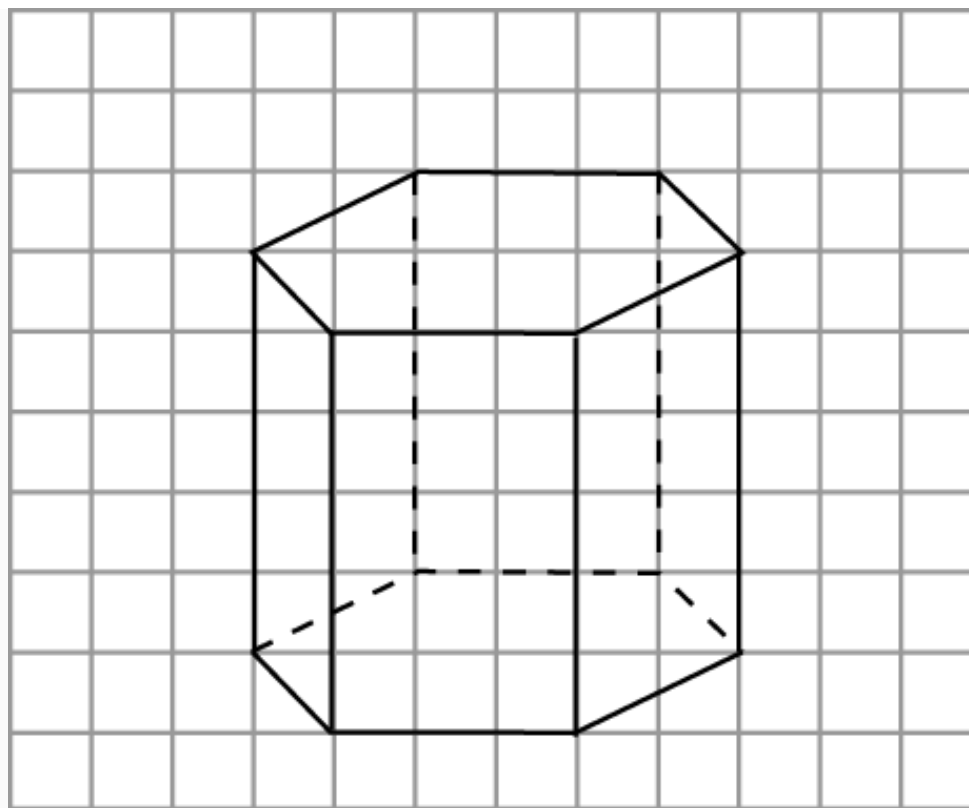
**Определение.** Призмой называется многогранник, две грани которого (основания) равные  $n$ -угольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные  $n$  граней (боковые грани) — параллелограммы.



# Призма

Призма называется **прямой**, если все ее боковые ребра перпендикулярны основаниям.

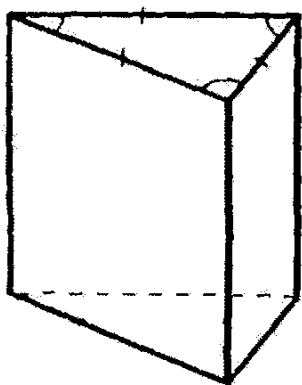
**Высота прямой** призмы равна ее *боковому ребру*.



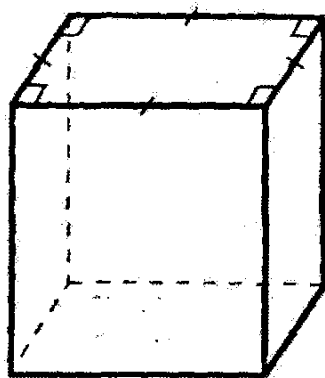
# Призма

Призма называется **правильной**, если она прямая и ее основания правильные многоугольники.

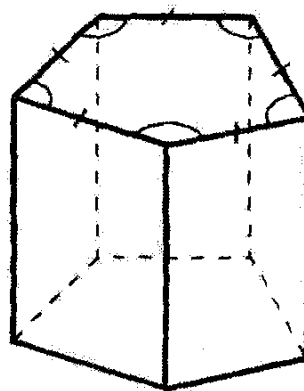
У *правильной призмы* все боковые грани - *равные прямоугольники*



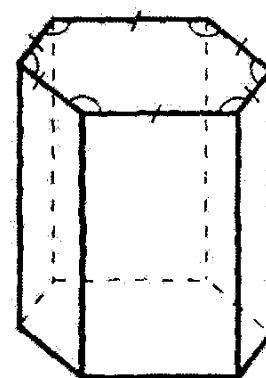
треугольная



четырехугольная



пятиугольная



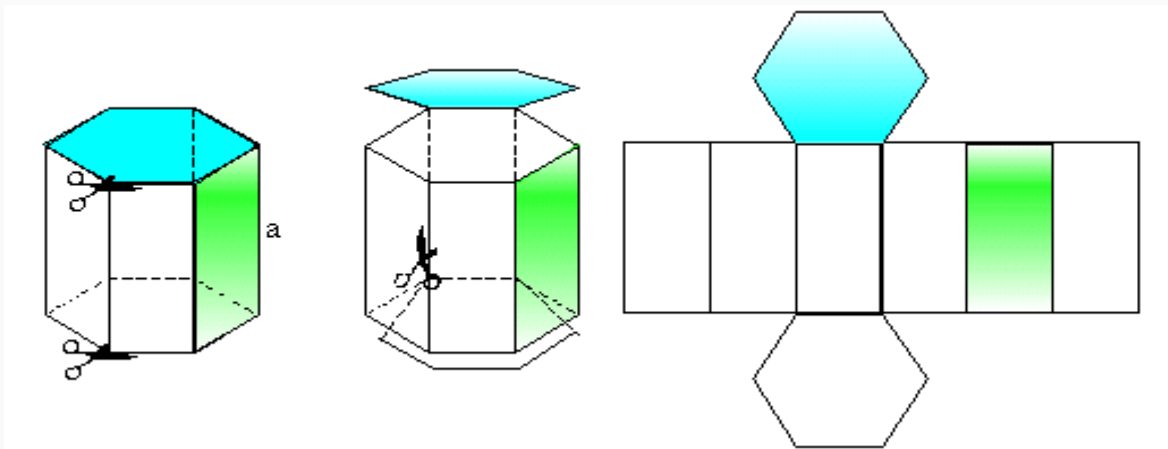
шестиугольная



# Призма

**Площадью полной поверхности призмы** называется *сумма площадей всех ее граней*, а площадью боковой поверхности призмы - *сумма площадей ее боковых граней*.

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$$



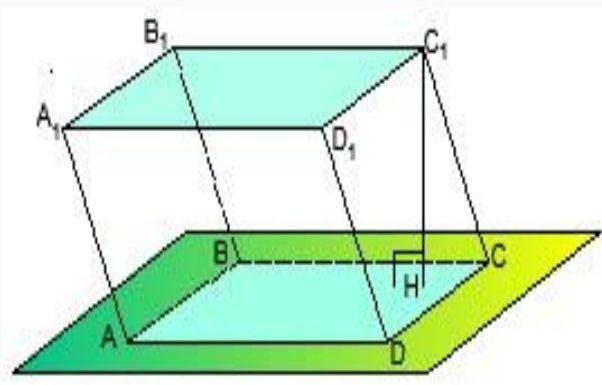
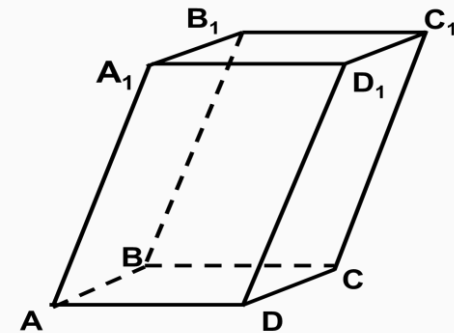
Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot H$$

$$V = S_{\text{осн}} \cdot H$$

# Параллелепипед

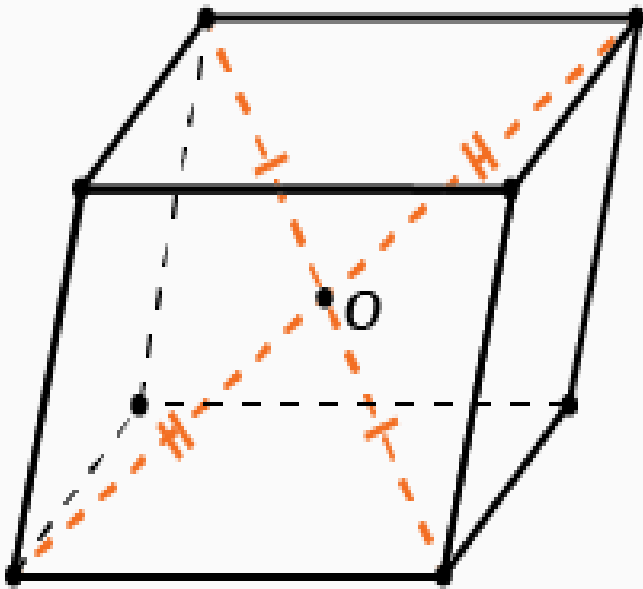
Параллелепипедом называется четырехугольная призма, в основаниях которой лежат параллелограммы



Высотой параллелепипеда называют расстояние между плоскостями его оснований.

**Различают два вида параллелепипедов: прямой и наклонный.**

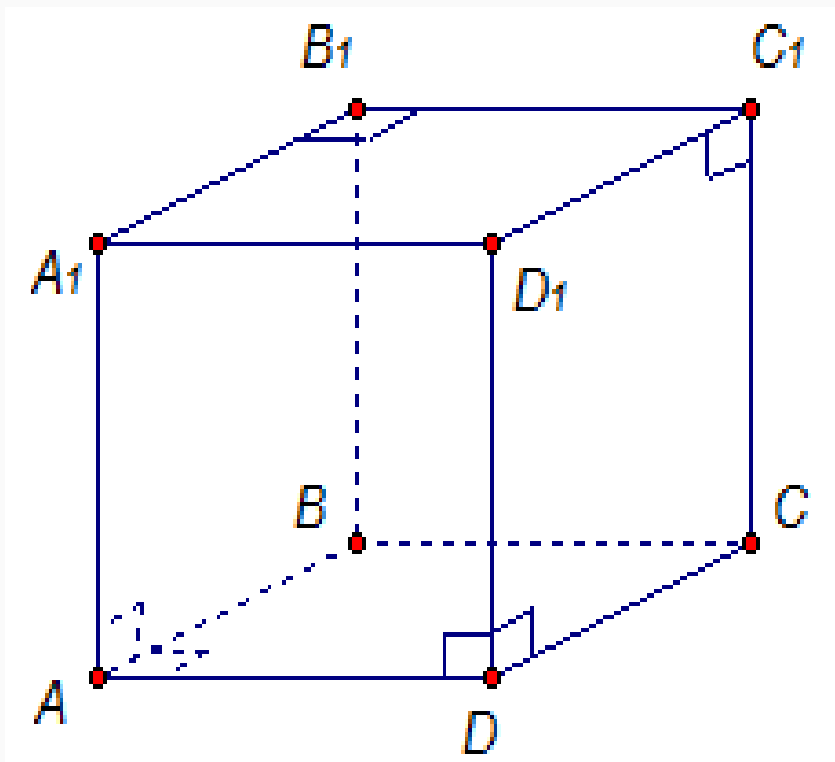
# Наклонный параллелепипед



1. Все грани параллелепипеда — *параллелограммы.*
2. Противолежащие грани *параллельны и равны.*
3. Все четыре диагонали пересекаются в одной точке и *точкой пересечения делятся пополам.*
4. Точка пересечения диагоналей — *центр симметрии.*

# Прямой параллелепипед

Параллелепипед называется **прямым**, если его боковые ребра перпендикулярны основаниям.



В прямом параллелепипеде:

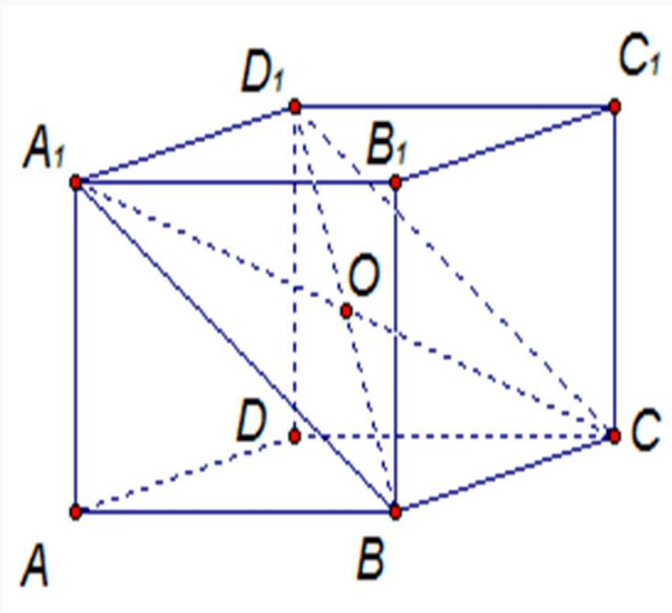
1. боковые грани — прямоугольники;
2. основания — параллелограммы;

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$$

$$V = abc$$

# Прямоугольный параллелепипед

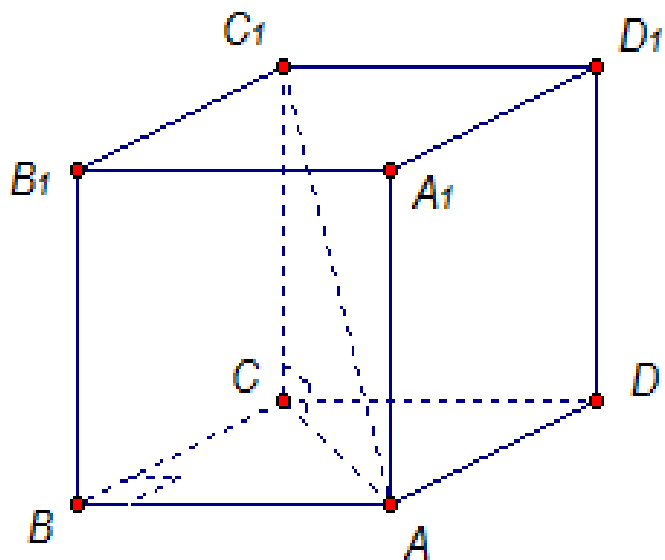
Параллелепипед называется прямоугольным, если его боковые ребра перпендикулярны к основанию. Основания являются прямоугольниками.



1. В прямоугольном параллелепипеде все **шесть граней** прямоугольники.
2. **Боковые ребра перпендикулярны основанию**. Значит, все боковые грани прямоугольного параллелепипеда - прямоугольники.
3. Все **двугранные углы** прямоугольного параллелепипеда **прямые**.
4. **Диагонали** прямоугольного параллелепипеда **равны**.

# Прямоугольный параллелепипед

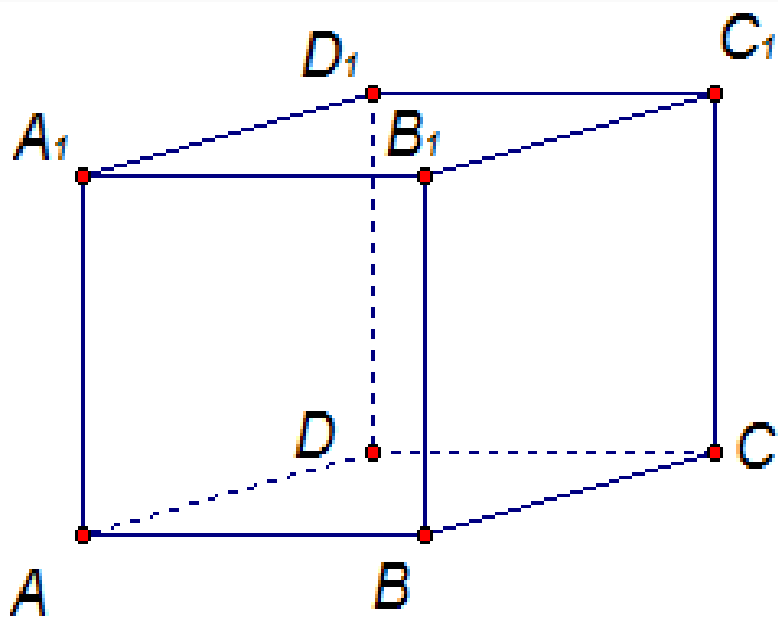
**Теорема.** В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трех его измерений.



$$AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$$

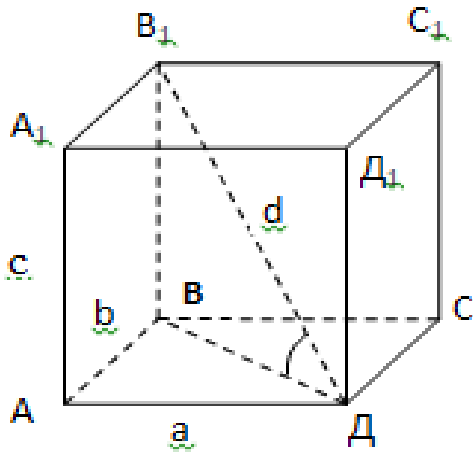
# Прямоугольный параллелепипед

Прямоугольный параллелепипед, у которого все три измерения равны, называется кубом.



- 1. Все грани куба – это равные квадраты.*
- 2.  $d^2=3a^2$ .*

**Задача 1** В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  стороны  $a=12\text{см}$ ,  $b=9\text{см}$ ,  $c=8\text{см}$  и  $B_1 D$  – диагональ. Найти диагональ, площадь полной поверхности и объем прямоугольного параллелепипеда.



**Дано:**  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – прямоугольный параллелепипед  
 $B_1 D$  – диагональ,  $a=12\text{см}$ ,  $b=9\text{см}$ ,  $c=8\text{см}$

**Найти:** 1)  $B_1 D$ ; 2)  $S_{\text{полн}}$ ; 3)  $V$

**Решение.** 1) Рассмотрим треугольник  $B_1 B D$ .

Найдем гипотенузу  $B_1 D$ :

$$B_1 D = d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{12^2 + 9^2 + 8^2} = \sqrt{144 + 81 + 64} = \sqrt{289} = 17 \text{ (см)}$$

2) Периметр основания  $P = 2(12+9) = 2 \cdot 21 = 42 \text{ (см)}$

3)  $S_{\text{бок}} = P \cdot H = 42 \cdot 8 = 336 \text{ (см}^2\text{)}$

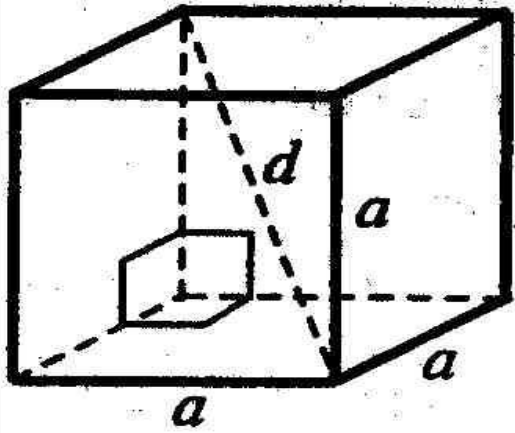
4)  $S_{\text{осн}} = a \cdot b = 12 \cdot 9 = 108 \text{ (см}^2\text{)}$

5)  $S_{\text{полн}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 2 \cdot 108 + 336 = 552 \text{ (см}^2\text{)}$

6)  $V = abc = S_{\text{осн}} \cdot H = 108 \cdot 8 = 864 \text{ (см}^3\text{)}$



**Задача 2. Найти длину стороны куба, площадь боковой, полной поверхности и объем, если его диагональ равна  $d = 5\sqrt{3}$  см**



**Дано:** куб,  $a$ - сторона куба,  
 $d = 6\sqrt{3}$  см

**Найти:** 1) сторону  $a$ , 2)  $S_{\text{бок}}$ , 3)  $S_{\text{полн}}$ ; 4)  $V$ .

Решение.

Из формулы для диагонали куба  $d^2 = 3a^2$   
выразим его сторону  $(6\sqrt{3})^2 = 3a^2$   
 $a = 6$  см

Площадь боковой и полной поверхности:

$$S_{\text{бок.}} = 4a^2 = 4 \cdot 6^2 = 144 \text{ см}^2$$

$$S_{\text{полн}} = 6a^2 = 6 \cdot 6^2 = 216 \text{ см}^2$$

$$\text{Объем: } V = a^3 = 6^3 = 216 \text{ см}^3$$

**Ответ:**  $a = 6$  см,  $S_{\text{бок}} = 144 \text{ см}^2$ ,  $S_{\text{полн}} = 216 \text{ см}^2$ ,  $V = 216 \text{ см}^3$ .

### Задача 3. Площадь полной поверхности куба $96\text{см}^2$ . Найти ребро куба, площадь боковой поверхности и объем.

Дано: куб,  $a$ - сторона куба,  $S_{\text{полн}} = 96\text{см}^2$

Найти: сторону  $a$ ,  $S_{\text{бок}}$ ,  $V$

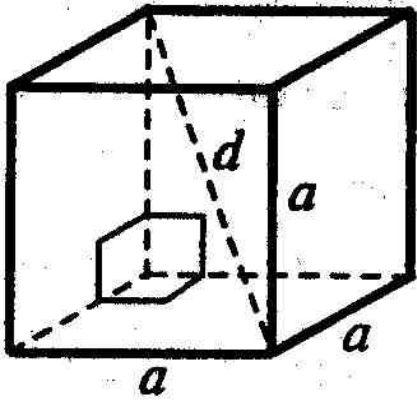
Решение:

$$S_{\text{полн}} = 6a^2 = 96 \Rightarrow a^2 = \frac{96}{6} = 16$$
$$a = 4 \text{ см}^2$$

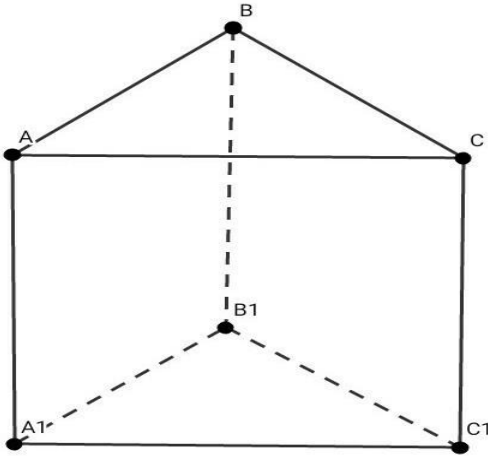
Площадь боковой поверхности:  $S_{\text{бок.}} = 4a^2 = 4 \cdot 4^2 = 64\text{см}^2$

Объем:  $V = a^3 = 4^3 = 64\text{см}^3$

Ответ:  $a = 4\text{см}$ ,  $S_{\text{бок}} = 64\text{см}^2$ ,  $V = 64\text{см}^3$ .



**Задача 4.** Найти объем прямой треугольной призмы, в основании которой лежит треугольник со сторонами  $a=5\text{см}$ ,  $b=5\text{см}$ ,  $c = 6\text{см}$ , а высота, которой равна  $20\text{см}$ .



**Дано:**  $ABCA_1B_1C_1$  –треугольная призма.  
стороны основания  
 $a = 5\text{см}$ ,  $b=5\text{см}$ ,  $c = 6\text{см}$  ,высота  $h=10\text{см}$   
**Найти:** объем призмы  $V$ .

**Решение.**

$V = S_{\text{осн}} h$ , основание – треугольник,

$S_{\text{осн}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$  где  $a, b$  стороны основания, а  $p = \frac{a+b+c}{2}$  полупериметр основания.

Получаем:  $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5+5+6}{2} = 8(\text{см})$

$S_{\text{осн}} = \sqrt{8(8-5)(8-5)(8-6)} = \sqrt{8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2} = 12(\text{см})$

$V = S_{\text{осн}} h = 12 \cdot 10 = 120\text{см}^2$

**Ответ:**  $V = 120\text{см}^2$

# Задания для самостоятельного решения:

Вариант 1. (Для девушек)

1) Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 5 см, 2 см, 3 см. Найти:

А) объем прямоугольного параллелепипеда;

Б) площадь его полной поверхности;

В) диагональ параллелепипеда.

2) Найти длину стороны куба, площадь боковой, полной поверхности и объем, если его диагональ равна  $d = \sqrt{8}$  см.

Вариант 2. (Для юношей)

1) Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 14 см, 8 см, 7 см. Найти:

А) объем прямоугольного параллелепипеда;

Б) площадь его полной поверхности;

В) диагональ параллелепипеда.

2) Найти длину стороны куба, площадь боковой, полной поверхности и объем, если его диагональ равна  $d = \sqrt{48}$  см.

# Домашнее задание:

Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 5 см, 1 см, 8 см.

Найти:

А) объем прямоугольного параллелепипеда;

Б) площадь его полной поверхности;

В) диагональ параллелепипеда.

2) Найти длину стороны куба, площадь боковой, полной поверхности и объем, если его диагональ равна  $d = \sqrt{27}$  см.