

Уважаемые студенты!

Задание:

1. Повторить теоретический материал.
2. Ответьте на контрольные вопросы.
3. Решите самостоятельную работу.
4. Фотоотчет работы предоставить на электронную почту hvastov@rambler.ru, при возникновении вопросов обращаться по телефону 0721098278 (WhatsApp).

Практическое занятие

Тема: Нахождение неопределенного интеграла методом непосредственного интегрирования

Цели:

- ❖ Повторить знания о первообразной, таблицу интегралов.
- ❖ Овладеть умением применения первообразной функции при решении вычислительных задач.
- ❖ Закрепить навыки нахождения табличных интегралов.
- ❖ Развивать логическое мышление, память, внимание и самостоятельность.
- ❖ проверить уровень усвоения студентами предыдущих знаний по темам: первообразная и неопределённый интеграл.

Ход работы

1. Вычислить неопределенные интегралы методом непосредственного интегрирования
2. Вычислить неопределенные интегралы методом подстановки

Контрольные вопросы

1. Какое действие называется интегрированием?
2. Какая функция называется первообразной для функции $f(x)$? Каким свойством она обладает?
3. Что такое неопределенный интеграл?
4. Перечислите основные свойства неопределенного интеграла?
5. Напишите основные формулы интегрирования (табличные интегралы).
6. Что понимают под непосредственным интегрированием?
7. Как выполняется метод подстановки в неопределенных интегралах?

Методическое пособие

Понятие неопределенного интеграла.

Совокупность всех первообразных функций $F(x)+C$ для функции $f(x)$ на интервале $a < x < b$ называют **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ на этом интервале

и пишут $\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}$,

где $f(x)dx$ - подынтегральное выражение; x - переменная интегрирования;

$F(x)$ - подынтегральная функция; C - произвольная постоянная.

Например,

- а) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}x + C$, так как $(\operatorname{tg}x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
- б) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg}x + C$, так как $(-\operatorname{ctg}x + C)' = \frac{1}{\sin^2 x}$;
- в) $\int \operatorname{tg}x dx = -\ln|\cos x| + C$, так как $(-\ln|\cos x| + C)' = \operatorname{tg}x$.

Свойства неопределенного интеграла.

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x) \quad d \int f(x) dx = f(x) dx$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции, сложенной с произвольной постоянной, т.е.

$$\int dF(x) dx = F(x) + C$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int af(x) dx = a \int f(x) dx$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен такой же алгебраической сумме неопределенных интегралов от каждой функции:

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx$$

Основные формулы интегрирования (табличные интегралы).

1. $\int 0 dx = C, C - \text{const};$
2. $\int dx = x + C;$
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1);$
4. $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \int x^{-1} dx = \ln|x| + C;$
5. $\int \frac{1}{x^n} dx = \int \frac{dx}{x^n} = \int x^{n-1} dx = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + C = -\frac{1}{(n-1)} \cdot \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1-x^2}} + C$
6. $\int \frac{1}{x^2} dx = \int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = -\frac{1}{x} + C;$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C;$
8. $\int e^x dx = e^x + C;$
9. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$
10. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$
11. $\int \cos x dx = \sin x + C;$
12. $\int \operatorname{tg}x dx = -\ln|\cos x| + C;$
13. $\int \operatorname{ctg}x dx = \ln|\sin x| + C;$
14. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}x + C;$
15. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg}x + C;$
16. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}x + C;$
17. $\int \frac{dx}{1-x^2} = -\operatorname{arcctg}x + C;$
18. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$
19. $\int \frac{dx}{-\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + C;$
20. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C;$
21. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C;$
22. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C;$
23. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C;$
24. $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C;$
25. $\int a^{kx} dx = \frac{1}{k} \cdot \frac{a^{kx}}{\ln a} + C;$
26. $\int \sin kx dx = -\frac{1}{k} \cos kx + C;$

$$27. \int \cos kx dx = \frac{1}{k} \sin kx + C;$$

$$28. \int \frac{dx}{\cos^2 kx} = \frac{1}{k} \operatorname{tg} kx + C;$$

$$29. \int \frac{dx}{\sin^2 kx} = -\frac{1}{k} \operatorname{ctg} kx + C;$$

$$30. \int \frac{dx}{\sin^2 kx} = -\frac{1}{k} \operatorname{ctg} kx + C.$$

Непосредственное интегрирование.

Непосредственное интегрирование основано на прямом использовании таблицы интегралов. Здесь могут представиться следующие случаи:

- 1) данный интеграл находится непосредственно по соответствующему табличному интегралу;
- 2) данный интеграл после применения свойств непосредственного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам;
- 3) данный интеграл после элементарных тождественных преобразований над подынтегральной функцией и применяя свойства неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Примеры

- $\int 5dx = 5 \int dx = 5x + C$; - на основании свойства 4 постоянный множитель 5 выносим за знак интеграла и, используя формулу 2, находим ответ.
- $\int 6x^2 dx = 6 \int x^2 dx = 6 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = 6 \frac{x^3}{3} + C = 2x^3 + C$; - используем свойство 4 и формулу 3.
- $\int 4(x^2 - x + 3)dx = 4 \int x^2 dx - 4 \int x dx + 4 \int 3dx = 4 \frac{x^3}{2} - 4 \frac{x^2}{2} + 12x + C = 2x^2 - 2x^2 + 12x + C$ - используем свойства 3 и 4 и формулы 2,3.
- $\int 2(3x-1)^2 dx = \int (18x^2 - 12x + 2)dx = 18 \int x^2 dx - 12 \int x dx + 2 \int dx = 6x^2 + 2x + C$;
- $\int \frac{x^3 + 3x^2 - 4x}{x} dx = \int (x^2 + 3x + 4)dx = \int x^2 dx + 3 \int x dx + 4 \int dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + 4x + C$.

Задания

Найдите интегралы:

$$1. \int \left(x^4 - \frac{3}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx;$$

$$2. \int \left(2 \sin x - \frac{3}{\cos^2 x} \right) dx;$$

$$3. \int \left(\frac{5}{x^3} - \frac{4}{x} + 3x^2 - 2 \right) dx;$$

$$4. \int \left(\frac{2}{\sin x^2} - 3 \cos x + 1 \right) dx;$$

$$5. \int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2}{x^2} dx.$$