Задание

1. Повторить материал предыдущей лекции, изучить и законспектировать материал лекции.
2. Записать в конспект задачи к лекции, решить задания для самостоятельного решения
3. Фотоотчет присылать на электронную почту

С уважением, Хвастова Светлана Ивановна

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721389311 (ватсап). Электронная почта: xvsviv@rambler.ru

Лекция Операции над множествами

Цель: рассмотреть основные понятия теории множеств, изучить свойства множеств; операции над множествами

План:

1. Основные определения теории множеств
2. Парадокс Рассела
3. Отношения между множествами
4. Операции над множествами.
5. Свойства операций над множествами. Алгебра теории множеств

Кто-то выдвинул робко отчаянный план:
Рассадить их по двум кораблям.
Но решительно не пожелал капитан
Экипаж свой делить пополам.

Льюис Кэрролл.
Охота на Снарка.

1. Основные определения теории множеств

Определение. Под *множеством* будем понимать совокупность каких-либо **вполне различаемых** объектов, обладающими общими для всех их и только их свойствами, и рассматриваемых как единое целое. Эти объекты называются элементами множества.

Предполагается, что для данного элемента *a* и множества А всегда можно определить, принадлежит элемент *a* множеству А (пишется: $a \in A$) или элемент ***a*** не принадлежит множеству А (пишется: $a \notin A$).

Множества, как правило, обозначаются большими латинскими буквами (А, В, С,…), а его элементы маленькими (a,b,c,…).

Определение. Множество, не содержащее ни одного элемента называется **пустым** и обозначается $\varnothing$.

Например: множество действительных корней уравнения

$x^2 = -1$

пустое.

Определение. Множество U, содержащее все элементы, рассматриваемые в данной задаче, называется **универсальным** множеством (универсум).

Рассматривая множество целых положительных чисел, в качестве универсального множества можно взять и множество целых чисел, и множество действительных чисел, и множество комплексных чисел, и само множество целых положительных чисел.

Определение. Множество называется **конечным,** если оно содержит конечное число элементов.

Определение. Если между элементами бесконечного множества можно установить взаимооднозначное соответствие с элементами множества положительных целых чисел, то говорят, что множество **счетно.**

Например:

множество действительных чисел, множество частных решений дифференциального уравнения - бесконечные множества.

множество чисел, делящихся без остатка на 3 – счетное множество,

множество букв русского алфавита, множество отличников вашей группы – конечно.

Множество задают обычно двумя способами:

- перечислением: A={1,2,3}; перечислением можно задать лишь конечные множества, которые имеют «небольшое количество» элементов.

- путем описания свойств, общих для всех элементов этого множества, и только этого множества. Это свойство называется **характеристическим свойством**, а такой способ задания множества **описанием**. A = {X | P(X)}

(А - это множество тех и только тех элементов X для которых P от X есть истинное предложение).

Примеры |

1) A={1,2,3,4,5,6,7,8};

A- есть множество всех X, таких, что X-целое и X>0 и X<9;

A={X | X - целое, 0<X<9}.

A= {состоит из арабских цифр от 1 до 9}.

2) $A=\{(x,y)|x^2+y^2=1, xR, y\in R\}$;

A= {точки единичной окружности на плоскости}

Свойств множества:

1) Элементы во множестве не повторяются.
2) Порядок элементов во множестве не важен.

Множества {*а, в, с*} и {*а, с, в*} одинаковы.

2. Парадокс Рассела

Описанные выше понятия теории множеств с успехом могут быть использованы в началах анализа, алгебры, математической логики и т. д. Однако при более строгих рассмотрениях такое интуитивное восприятие может оказаться неудовлетворительным.

Приведем в качестве примера парадокс Рассела.

Можно указать такие множества, которые принадлежат самим себе как элементы, например, множество всех множеств.

Можно также указать множества, которые не являются элементами самих себя, например, множество {1,2}, элементами которого являются числа 1 и 2 (других элементов нет).

Рассмотрим теперь множество А **всех** таких множеств X, что X не есть элемент X.

Тогда, если это полученное множество А не есть элемент А (самого себя), то по определению, А также есть элемент А.

С другой стороны, если А есть элемент А, то А – одно из тех множеств X, которые не есть элементы самих себя, т.е. А не есть элемент А (не принадлежит А).

В любом случае А есть элемент А и А не есть элемент А.

Парадокс. Тем самым, интуитивная теория множеств – противоречива. Существует боле строгая формализация теории множеств.

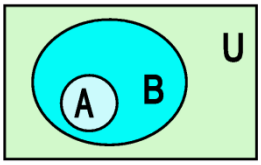
Мы лишь укажем, что к парадоксам приводит в ряде случаев попытка объять необъятное: множество всех множеств (существующих в природе и в нашем сознании).

3. **Отношения между множествами**

Определение. Множества A и B считаются *равными*, если они состоят из одинаковых элементов. Обозначение: A=B.

Примечание. Хотя $1\in\{1\}$, $\{1\}\in\{\{1\}\}$, но $1\notin\{\{1\}\}$, так как единственным элементом $\{\{1\}\}$ является $\{1\}$. То есть элемент не считается равным множеству, если даже множество состоит только из этого элемента.

Определение. Говорят, что A *содержится* в B или что A есть *подмножество* множества B, если каждый элемент множества A есть элемент множества B.



Для пояснения различных соотношений между множествами используются **диаграммы Венна (круги Эйлера),** где множества изображаются в виде совокупностей точек на плоскости ограниченных некоторой замкнутой кривой. Так диаграмма Венна для изображения подмножества ($A\in B$) может выглядеть следующим образом

Отношение *включения* между множествами (A *содержится* в B) обозначается знаком $\subseteq$, т.е. $A\subseteq B$.

Пустое множество есть подмножество любого множества.

Определение. Если $A\subseteq B$ и $A\neq B$, то A есть *собственное* подмножество B и пишут $A\subset B$ ||.

Например, $\{1,2\}\subset\{1,2,3,4\}$, множество четных чисел есть собственное подмножество множества целых чисел и т.д.

Свойства отношения включения:

- $X\subseteq X$; (свойство рефлексивности);
- если $X\subseteq Y$, $Y\subseteq Z$, то $X\subseteq Z$, (свойство транзитивности);
- если $X\subseteq Y$, $Y\subseteq X$, то $X=Y$ (свойство антисимметрии).

Определение. Количество элементов, составляющих множество, называется **мощностью множества**.

Определение. Множество всех подмножеств A называют *множеством - степенью* или *Булеаном* и обозначается B(A).

Утверждение: если A состоит из n элементов, то B(A) состоит из 2^n элементов.

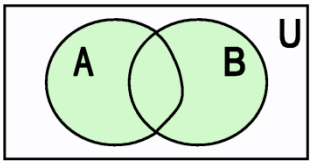
Пример.

Пусть A={a,b,c}. Тогда n=|A|=3 и

$B(A) = 2^n=2^3=\{\varnothing ,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}=8$.

4. Операции над множествами

1) *Объединением* множеств A и B называется множество всех элементов, которые являются элементами хотя бы одного множества A или B:

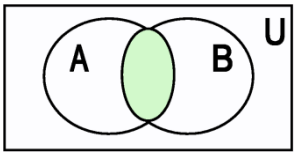


$A\cup B=\{x \mid x\in A$ <u>или</u> $x\in B\}$

Некоторые свойства: $A\subseteq A\cup B$, $B\subseteq A\cup B$.

Диаграммы Эйлера-Венна. Вводится понятие *универсального* множества U (множества, содержащего все возможные элементы). Этот *универсум* обозначается квадратом. Другие множества обозначаются кругами внутри этого квадрата.:

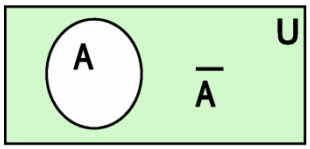
2) *Пересечением* множеств A и B называется множество всех элементов, которые являются элементами обоих множеств A и B:



$A\cap B=\{x \mid x\in A$ <u>и</u> $x\in B\}$

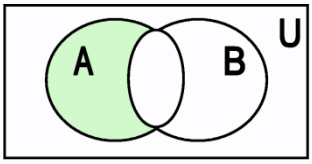
Некоторые свойства: $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$, $A\cap B\subseteq B\subseteq A\cup B$.

3) **Дополнением** множества A (обозначается $\overline{A}$) называется множество, элементы которого не принадлежат A: $\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$



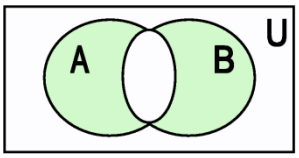
$\overline{A} = U \setminus A$

4) *Вычитание* множеств или относительное дополнение множества A до множества B: $B\setminus A=\{x \mid x\in B, x\notin A\}$.



Эта операция может быть осуществлена с помощью пересечения и дополнения: $B\setminus A=B\cap\overline{A}$.

5) **Симметричной разностью** двух множеств A и B (обозначается $A\Delta B$) называется множество, элементы которого принадлежат A, или B, но не обоим сразу.



1. $A\Delta B= (A\setminus B)U(B\setminus A)$.
2. $A\Delta B= (AUB)\setminus(B\cap A)$.

5. Свойства операций над множествами. Алгебра теории множеств

	Закон	Объединение	Пересечение
1	Закон коммутативности	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$
2	Закон ассоциативности	$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$;	$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;
3	Закон дистрибутивности	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
4	Закон поглощения	$A\cup(A\cap B)=A$	$A\cap(A\cup B)=A$
5	Закон де Моргана	$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$	$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$
6	Закон идемпотентности	$A\cup A=A$;	$A\cap A=A$;
7	Закон инволютивности	$\overline{\overline{A}}=A$	
8	Свойство нуля	$A\cup\varnothing=A$;	$A\cap\varnothing=\varnothing$;
9	Свойство дополнения	$A\cup\overline{A}=U$;	$A\cap\overline{A}=\varnothing$;
10	Свойство единицы	$A\cup U=U$;	$A\cap U=A$;

Доказательство свойства 3 (с помощью свойства антисимметрии $\subseteq$)

Во-первых, $A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

Действительно, если $x\in A\cup(B\cap C)$, то $x\in A$ или $x\in B\cap C$.

Если $x\in A$, то $x\in A\cup B$ и $x\in A\cup C$. Тогда $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

Если $x\in B\cap C$, то $x\in B$ и $x\in C$. Тогда $x\in B\cup A$ и $x\in C\cup A$, а значит, $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

Во-вторых, $(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)$.

На самом деле, если $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$, то $x\in A\cup B$ и $x\in A\cup C$. Тогда $x\in A$ или ($x\in B$ и (одновременно) $x\in C$), т.е. ($x\in B\cap C$). Тем самым, $x\in A\cup(B\cap C)$.

Из первого и второго следует справедливость утверждения.

Доказательство свойства 8 ($\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$).

Пусть $x \in \overline{A \cup B}$. Тогда $x \in U$ и $x \notin A \cup B$ $\Rightarrow$ $x \notin A$ и $x \notin B$ $\Rightarrow$ $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$ $\Rightarrow$ $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ $\Rightarrow$ $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Пусть $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Тогда $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$ $\Rightarrow$ $x \in U$ и $x \notin A$ и $x \notin B$ $\Rightarrow$ $x \notin A \cup B$, т.е. $x \in \overline{A \cup B}$ $\Rightarrow$ $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

В силу справедливости того и другого справедливо и доказываемое утверждение.

Задача. Существуют ли множества?

$A \cap B \neq \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$, $(A \cap B) \setminus C = \varnothing$

Решение: $A \cap B \cap \overline{C} = B \cap (A \cap \overline{C}) = B \cap A \neq \varnothing$.

Задания для самостоятельного решения

Доказать тождества:

а) $(\overline{A} \cup B) \cap A = A \cap B$

б) $A + (B + C) = (A + B) + C$