Задание!

1. Повторите учебный материал предыдущей лекции, пользуясь таблицей интегралов выполнить упражнения к лекции.

2. Проверьте себя (решение примеров прилагается);

3. Фотоотчет присылать на электронную почту hvastov@rambler.ru

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721098278 (ватсап).

Тема занятия: Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Нахождение неопределенного интеграла методом непосредственного интегрирования

Цель: Научиться находить неопределённый интеграл, методом непосредственного интегрирования

Таблица неопределённых интегралов

1	$\int dx = x + c\,,\ c = const$	**2**	$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c\,,\ n \neq -1$
3	$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$	**4**	$\int e^x dx = e^x + c$
5	$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c\,,\ a > 0\,,\ a \neq 1$	**6**	$\int \sin x dx = -\cos x + c$
7	$\int \cos x dx = \sin x + c$	**8**	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + c$
9	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + c$	**10**	$\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a} + c, \\ -\dfrac{1}{a}\mathrm{arcctg}\dfrac{x}{a} + c \end{cases}$
11	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin\dfrac{x}{a} + c, \\ -\arccos\dfrac{x}{a} + c \end{cases}$	**12**	$\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x-a}{x+a}\right\rvert + c$
13	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + c$	**14**	$\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x+a}{x-a}\right\rvert + c$

1.1. Непосредственное интегрирование

Простейший метод интегрирования – непосредственное интегрирование. Суть непосредственного интегрирования – с помощью основных алгебраических действий, основных формул и свойств неопределённого интеграла привести (преобразовать) заданный интеграл к табличному.

Пример 1.1. Найдите интегралы:

1.1.1. $\int x^5 dx$; **1.1.2.** $\int \frac{dx}{3-x^2}$; **1.1.3.** $\int \left(\frac{5}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x^2}\right)dx$;

1.1.4. $\int 2^x \cdot e^x dx$; **1.1.5.** $\int \frac{dx}{16x^2+9}$; **1.1.6.** $\int \left(x^2+1\right)\left(x-2\right)dx$;

1.1.7. $\int \mathrm{tg}^2 x dx$; **1.1.8.** $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$; **1.1.9.** $\int \frac{3\cdot 4^x + 4\cdot 3^x}{3^x} dx$;

1.1.10. $\int \frac{(2+x)^3}{x} dx$; **1.1.11.** $\int \frac{1+2x^2}{x^2\left(1+x^2\right)} dx$.

Решение. 1.1.1. Интеграл находим по формуле 2 табл. 1.1:

$$\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + c = \frac{x^6}{6} + c.$$

1.1.2. По формуле 14 табл. 1.1, при $a = \sqrt{3}$, получаем

$$\int \frac{dx}{3-x^2} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - x^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln\left|\frac{x+\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}\right| + c.$$

1.1.3. Запишем подынтегральную функцию в виде разности степенных функций и воспользуемся свойствами 1.2 и 1.3:

$$\int \left(\frac{5}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x^2}\right)dx = 5\int x^{-\frac{1}{2}} dx - \int x^{\frac{2}{3}} dx = 5\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + c =$$

$$= 10x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + c = 10\sqrt{x} - \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + c.$$

1.1.4. Преобразуем подынтегральную функцию и получим интеграл 5 табл.1.1:

$$\int 2^x \cdot e^x dx = \int (2e)^x dx = \frac{(2e)^x}{\ln(2e)} + c.$$

1.1.5. Вынесем в знаменателе множитель при x^2 и применим формулу 10 табл. 1.1:

$$\int \frac{dx}{16x^2+9} = \frac{1}{16}\int \frac{dx}{x^2+\frac{9}{16}} = \frac{1}{16}\int \frac{dx}{x^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{\frac{3}{4}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\frac{3}{4}} + c =$$

$$= \frac{1}{12}\mathrm{arctg}\frac{4x}{3} + c.$$

1.1.6. Чтобы проинтегрировать данное выражение, раскроем скобки, и затем воспользуемся свойствами 1.2 и 1.3:

$$\int\left(x^2+1\right)(x-2)dx=\int\left(x^3-2x^2+x-2\right)dx=\frac{x^4}{4}-2\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x+c.$$

Обратите внимание: В примере 1.1.6 мы пропустили запись суммы интегралов и сразу записали сумму первообразных. В дальнейшем будем поступать так же, помня о существовании правил интегрирования 1.2 и 1.3.

Некоторые интегралы можно находить несколькими способами. Приведём один из способов интегрирования.

1.1.7. Преобразуем подынтегральную функцию, получим табличные интегралы 8 и 1 табл. 1.1:

$$\int \mathrm{tg}^2 x dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=$$
$$=tgx-x+c.$$

1.1.8. Применим тригонометрическую формулу $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, свойство линейности неопределённого интеграла и формулы 1 и 7 табл. 1.1:

$$\int\sin^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1-\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int dx-\int\cos x dx\right)=\frac{1}{2}(x-\sin x)+c.$$

1.1.9. Производя почленное деление, преобразуем частное в сумму функций. Получим табличные интегралы 5 и 1 табл. 1.1:

$$\int\frac{3\cdot 4^x+4\cdot 3^x}{3^x}dx=\int\left(\frac{3\cdot 4^x}{3^x}+\frac{4\cdot 3^x}{3^x}\right)dx=3\int\left(\frac{4}{3}\right)^x dx+4\int dx=\frac{3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^x}{\ln\frac{4}{3}}+4x+c.$$

1.1.10. Воспользуемся формулой $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, свойством линейности неопределённого интеграла и формулами 3, 1, 2 табл. 1.1:

$$\int\frac{(2+x)^3}{x}dx=\int\frac{8+12x+6x^2+x^3}{x}dx=8\int\frac{dx}{x}+12\int dx+6\int xdx+\int x^2dx=$$
$$=8\ln|x|+12x+3x^2+\frac{x^3}{3}+c.$$

1.1.11. Выполнив элементарные преобразования в числителе дроби, представим частное в виде суммы функций:

$$\int \frac{1+2x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx = \int \frac{(1+x^2)+x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx = \int\left(\frac{1+x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}+\frac{x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}\right)dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = -x^{-1} + \mathrm{arctg}x + c = -\frac{1}{x} + \mathrm{arctg}x + c\,.$$

Здесь воспользовались формулами 2 и 10 табл. 1.1.