Уважаемые студенты!

- Вам необходимо разобрать теоретический материал;
- Написать коспект (удобнее будет оформить в в виде таблицы);
- Для закрепления изученного материала вы должны решить задачи в конце лекции;
- Фотоотчет конспекта лекции и выполненного домашнего задания предоставить на электронную почту hvastov@rambler.ru,
- При возникновении вопросов обращаться по телефону 0721098278 (WatsApp).

Тема: Пирамида. Правильная и усечённая пирамиды

Цель: Обобщить и систематизировать материал по данной теме

План

1. Правильная треугольная пирамида
2. Стандартные задания на пирамиды ($S_{осн}$,$S_{бок}$,h_a)
3. Стандартные задания на пирамиды (двугранные углы)
4. Усеченная правильная пирамида

Правильная треугольная пирамида

Определение: правильной n-угольной пирамидой называется такая пирамида, у которой в основании лежит правильный n-угольник, и высота проецируется в центр этого n-угольника (рис. 1).

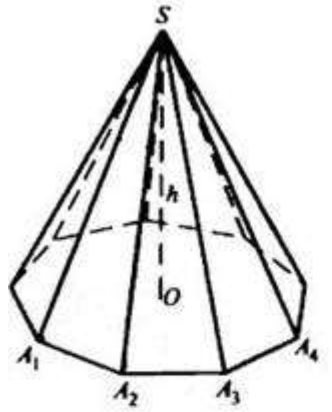

Рис. 1

Правильная треугольная пирамида

Для начала рассмотрим ΔABC (рис. 2), в котором AB=BC=CA (то есть в основании пирамиды лежит правильный треугольник). У правильного треугольника центр вписанной и описанной окружности совпадают и являются центром самого треугольника. В данном случае центр находится следующим образом: находим середину AB – C_1, проводим отрезок CC_1, который является медианой, биссектрисой и высотой; аналогично находим середину AC – B_1 и проводим отрезок BB_1. Пересечением BB_1 и CC_1 будет точка O, которая является центром ΔABC.

Если соединить центр треугольника O с вершиной пирамиды S, то получим высоту пирамиды $SO \perp ABC$, $SO = h$.

Соединив точку S с точками A, B и C получим боковые ребра пирамиды.

Мы получили правильную треугольную пирамиду SABC (рис. 2).

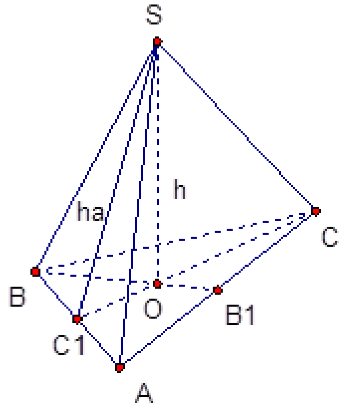

Рис. 2

Стандартные задания на пирамиды ($S_{осн}$,$S_{бок}$,h_a)

Известны стороны основания – a и высота пирамиды – h. Необходимо найти:

1. $S_{осн}$
2. $S_{бок}$,h_a
3. $\angle$(AB)
4. $\angle$(SC)

Решение:

1. Найти $S_{осн}$

Если есть ΔABC (рис. 3), сторона которого равна a, то

$$S_{осн} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

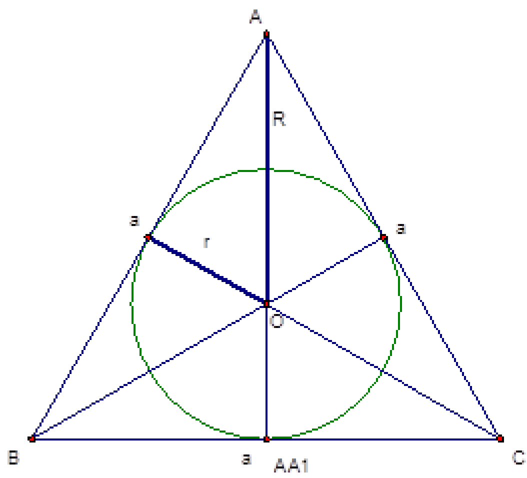

Рис. 3

2. Найти $S_{бок}$,h_a

Отрезок SC_1 называется апофемой h_a(рис. 2). Апофему найдем из прямоугольного треугольника SC_1O. Известен катет SO=h, второй катет C_1O найдем из ΔABC (рис. 3).

Для начала найдем высоту AA_1 из прямоугольного треугольника AA_1C:

$$AA_1 = a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Высота AA_1 состоит из радиуса вписанной окружности $r=C_1O$ и из радиуса описанной окружности R (причем R=2r). $AA_1 = r + R = 3 \cdot r;$

Следовательно

$$r = C_1O = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$R = 2r = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{3}$$

Зная катеты ΔSC_1O, мы можем найти гипотенузу

$$SC_1 = h_a = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{h^2 + \frac{3a^2}{36}} = \frac{\sqrt{36h^2 + 3a^2}}{6}$$

Найдя апофему h_aможно без труда найти

$$S_{SAB} = \frac{1}{2} AB \cdot h_a = \frac{1}{2} a \cdot \frac{\sqrt{36h^2 + 3a^2}}{6} = \frac{a\sqrt{36h^2 + 3a^2}}{12}$$

И

$$S_{бок} = 3 \cdot S_{SAB} = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot h_a$$

Стандартные задания на пирамиды (двугранные углы)

Теорема о боковой поверхности правильной пирамиды

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему

$$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot h_a$$

3. Найти ∠(AB)

Двугранный угол при ребре AB есть угол между плоскостями SAB и ABC. Обозначим его

$$\gamma = \angle(AB) = \angle SC_1O$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{h}{r} = \frac{6h}{a\sqrt{3}}$$

Избавимся от иррациональности в знаменателе путем умножения и деления выражения на $\sqrt{3}$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2h\sqrt{3}}{a}$$

Зная тангенс угла, можем найти сам угол

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{2h\sqrt{3}}{a}$$

5)∠4. Найти(∠ (SC)

Проведем BP⊥SC и AP⊥SC ,SC, тогда ∠(SC)= ∠APB. Обозначим его как ∠α (рис. 4)

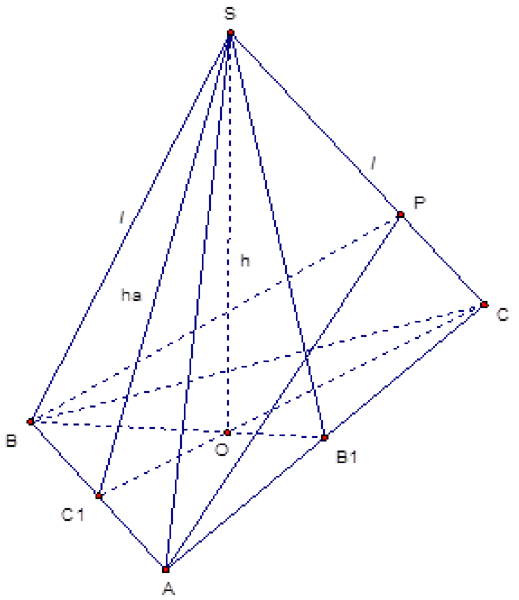

Рис. 4

Для нахождения угла рассмотрим равнобедренный треугольник APB. Основание треугольника AB=a, а боковые стороны найдем из ΔACS (который тоже является равнобедренным треугольником) в).

В ΔSAC S известны основание AC = a и боковые стороны $SA = SB = l \, (l = \sqrt{h_a{}^2 + \frac{a^2}{4}})$. Необходимо найти высоту ,высоту, проведенную из точки A. Для этого нужно найти площадь треугольника:

$$S_{ACS} = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} l \cdot AP$$

Из данного уравнения найдем AP:

$$AP = \frac{ah_a}{l}$$

По теореме косинусов

$$a^2 = AP^2 + BP^2 - 2 \cdot AP \cdot BP \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{AP^2 + BP^2 - a^2}{2 \cdot AP \cdot BP}$$

Косинус угла однозначно определяет угол в треугольнике, поэтому дальше задача очевидная.

Усеченная правильная пирамида

Усеченная правильная пирамида

Любая усеченная пирамида является многогранником, образованным пирамидой и её сечением, параллельным основанию.

Теорема о боковой поверхности правильной усеченной пирамиды

Площадь боковой поверхности правильной усечённой пирамиды равна произведению полу суммы периметров на апофему.

Площадь одной боковой грани усеченной пирамиды есть площадь трапеции (рис. 5)

$$S = \frac{a + b}{2} h_a$$

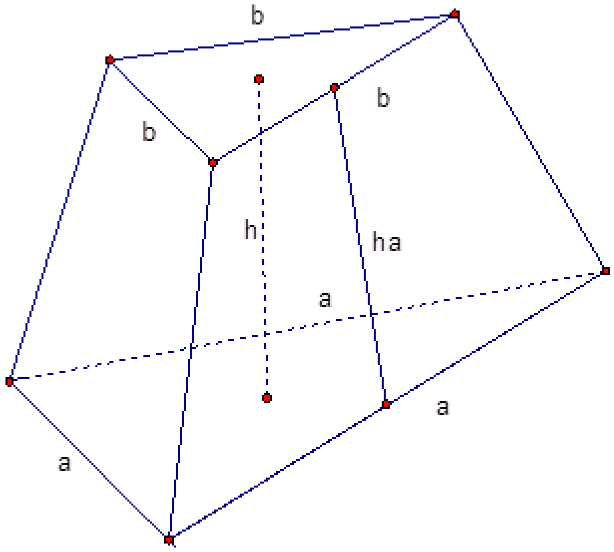

Рис. 5

А площадь всей боковой поверхности

$$S_{бок} = \frac{P_1 + P_2}{2} h_a$$

Выводы:

Мы рассмотрели правильную пирамиду и стандартные задачи на нее, включая двугранные углы. А также усеченную правильную пирамиду.

Домашнее задание

1. Какое наименьшее число ребер может иметь пирамида?
2. Сколько ребер у n-угольной усеченной пирамиды?
3. На Рис. 4 мы провели перпендикуляр CP к ребру SC и соединили точку B и P. Докажите, что BP⊥SC.
4. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD (точка O – центр основания, S – вершина) боковое ребро SB=13, а диагональ основания AC =24. Найдите длину отрезка SO.
5. В правильной треугольной пирамиде SABC точка L – середина ребра AC, S – вершина. Известно, что BC = 6, а SL = 5. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.