Задание

1. Изучить и кратко законспектировать материал лекции. Обязательно решить задания в лекции.

2. Фотоотчет присылать на электронную почту в трехдневный срок

С уважением, Хвастова Светлана Ивановна

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721389311. Электронная почта: xvsviv@rambler.ru

*ЛЕКЦИЯ «*Понятие бинарного отношения и его свойства. Основные понятия.*»*

Цель: дать понятие отношения, изучить способы задания бинарных отношений, рассмотреть способы задания бинарных отношений на конкретных примерах.

План

1. ***Понятие бинарного отношения и его свойства.***
2. ***Основные понятия.***

1. *Понятие бинарного отношения и его свойства.*

Отношения.

Пусть заданы два множества А и В. Найдем А Х В.

Подмножество k $\subset$ А Х В называется ***отношением из множества А во множество В.***

Отношения задаются знаками $=, <, >, \leq, \geq$ и т.д.

Пример.

А={2,3,4}, В={1,4,3}

А Х В={(2,1),(2,4),(2,3),(3,1),(3,4),(3,3),(4,1),(4,4),(4,3)}

Выделим отношения больше > k_1={(2,1),(3,1),(4,1),(4,3)}

и меньше < k_2={(2,4),(2,3),(3,4)}

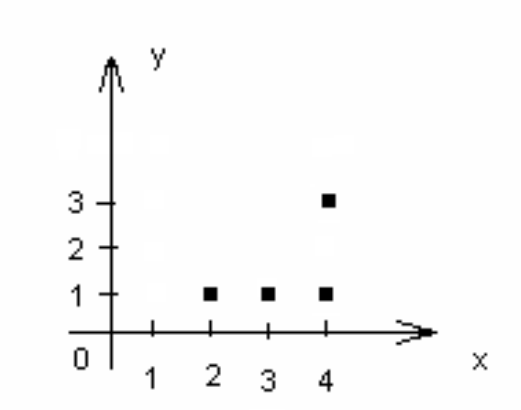

Рисунок – 1. Отношение k_1 «а больше b»

Отношения на множестве.

Если в декартовом произведении в качестве множества B выбрать множество A (то есть A X A= A^2), то отношение *k из* A^2 называется ***отношением на множестве A.***

Для отношений на множестве вводятся понятия:

- ***Обратное отношение***-это множество пар (a,b) таких, что (b,a) $\in A^2$: k^{-1}
- ***Дополнение***-это множество пар (a,b) $\notin k$: $\bar{k}$
- ***Тождественное отношение***-множество пар (a, a) таких, что, a $\in$A:

I= {(a, a), a $\in$ A}

- ***Универсальное отношение U***={(a,b),a $\in$A, b $\in$A}

Виды отношений:

1) Инъекция.

Если каждый элемент множества A соответствует элементу из множества B, то отношение f называется инъективным.

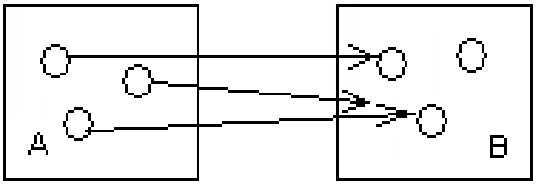

Рисунок – 2. Инъекция

2) Сюръекция.

Если для каждого элемента y множества B существует элемент x $\in$A, соответствующий элементу y, то такое отношение f называется сюръекцией.

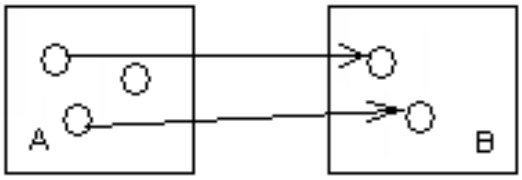

Рисунок – 3. Сюръекция.

3) Биекция.

Если для каждого элемента y $\in$B существует ровно один элемент x $\in$A, которому соответствует y , то такое отношение называется биективным.

Биективное отношение инъективно и сюръективно.

Биективное отношение имеет обратное отношение.

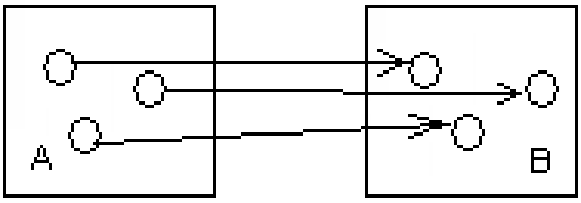

Рисунок – 4. Биекция

2. Основные понятия

Определение: Любое подмножество ρ прямого произведения $A_1 \times A_2 \times .... \times A_n$ называется *n-местным (n-арным) отношением*, определенным на множествах A_1, A_2, ... A_n.

$$\rho \subseteq A_1 \times A_2 \times ... \times A_n .$$

Другими словами элементы $x_1, x_2, ..., x_n$ (где $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2, ..., x_n \in A_n$) связаны отношением ρ тогда и только тогда, когда $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \rho$. $(x_1, x_2, ..., x_n)$ - упорядоченный набор из n элементов.

Отношения, хотя и являются множествами, принято обозначать малыми буквами греческого алфавита α, β, γ, ...ρ, σ, τ.

Определение: Любое подмножество α прямого произведения $\alpha \subseteq A_1 \times A_2$ называется *бинарным отношением,* определенным на множествах A_1 и A_2.

Часто используют следующие обозначения:

1. $(a,b) \in \rho$, т.е. a и b находятся в отношении ρ.
2. $a\rho b$, т.е. a связано с b отношением ρ.
3. $b \in \rho(a)$, $\rho(a)=b$.

Рассмотрим частный случай, когда $A_1 = A_2 = A$, тогда $A \times A = A^2 = \{(a,b) | a, b \in A\}$

$\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{\text{n раз}} = A^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A,\ i=1 \div n\}$, $A^1 = A$.

Т.о. будем иметь, что любое подмножество A^2 определяет отношение на A. Очевидно, что $\alpha = \varnothing$, $\alpha = A^2$ также являются бинарными отношениями.

Пример:

$A=\{1, 2, 3\}$ $A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

$\alpha=\{(1, 1), (3, 2), (2, 3)\} \subseteq A^2$

$\beta=\{(1, 1), (3, 2), (1, 4)\} \not\subset A$ - β не является бинарным отношением на A.

Аналогично определяется *тернарное* отношение, определенное на множестве A, а именно $\beta \subseteq A^3 = A \times A \times A$.

Пример:

1) Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Тогда

$\rho=\{(x, y)\} | x, y \in A$, x-делитель y, $x \le 5\}$ может быть записано в частном виде

$\rho=\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (1,8), (1,9), (1,10), (2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (2,10), (3,3), (3,6), (3,9), (4,4), (4,8), (5,5), (5,10)\}$

2) R-множество действительных чисел. $\alpha \subseteq R^2 = R \times R$.

$\alpha=\{(x,\ y) \mid x,\ y \in R,\ x<y\}$, $(1,\ 2) \in \alpha$, $(2,\ 1) \notin \alpha$ т.к. $x > y$.

3) Шахматы. Пусть $F = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $R=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и $S=F\times R$ - множество всех клеток обозначаемых парами (x,y), где $x\in F$, $y\in R$. Определим бинарное отношение Υ для ладьи на S т.о., что клетка $(s,t) \in S$ тогда и только тогда, когда, s и t элементы S, $s,t\in S$ и ладья может пройти от s к t одним ходом на пустой доске. (Ладья может изменять либо горизонтальную, либо вертикальную координату, но не обе одновременно). Поэтому, $\Upsilon \subseteq S \times S$ и $\Upsilon = \{(f_s,\ r_s),\ (f_t,\ r_t)) \mid (f_s=f_t$ и $r_s\neq r_t)$ или $(f_s\neq f_t$ и $r_s=r_t)\}$.

Для бинарных отношений можно использовать любые способы задания множеств, например, список пар, для которых данное отношение выполняется. Отношения на конечных множествах обычно задаются списком или матрицей.

Матрица бинарных отношения ρ на множестве $M=\{a_1,...,a_m\}$ - это квадратная матрица C порядка m, в которой элемент c_{ij}, стоящий на пересечении i-ой строки и j-го столбца, определяется следующим образом:

$$C_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если}\,(a_i, a_j) \in \rho, \\ 0, \text{если}\,(a_i, a_j) \notin \rho \end{cases}$$

Пример: $M=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\rho \subseteq M^2=M \times M$.

1. $\rho = \{(a, b) \mid a, b \in M$ и $a \le b\}$

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	1	1	1	1
3	0	0	1	1	1	1
4	0	0	0	1	1	1
5	0	0	0	0	1	1
6	0	0	0	0	0	1

2. $\rho = \{(a, b) \mid a, b \in M$ и a и b имеют общий делитель$\}$

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	0	1	0	1
3	1	0	1	0	0	1
4	1	1	0	1	1	1
5	1	0	0	0	1	1
6	1	1	1	0	0	1

3. $\rho = \{(a, b) | a, b \in M$ и a - делитель $b\}$

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	0	1	0	1
3	1	0	1	0	0	1
4	1	0	0	1	0	0
5	1	0	0	0	1	0
6	1	0	0	0	0	1

Так как отношения на M задаются подмножествами M^2, то для них можно определить те же операции, что и над множествами.

Рассмотрим еще три отношения, которые полезны при рассмотрении множеств.

Определение 2.3: Для любого множества A определим *тождественное отношение* τ_A и *универсальное отношение* ξ_A следующим образом:

$\tau_A = \{(a, a) \mid \forall\, a \in A\}$,

$\xi_A = \{(a, b) \mid \forall\, a \in A,\ b \in A\}$.

Таким образом, $\xi_A = A^2$

Т. к. $\varnothing \subseteq A^2$, то $\varnothing$ является отношением на A и называется *пустым* отношением.

Пусть A={1, 2, 3, 4}. Матрица смежности тождественного, универсального и пустого отношений, определенных на множестве A, будут иметь соответственно вид:

1) матрица тождественного отношения:

	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1

2) матрица универсального отношения:

	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1

3) матрица пустого отношения:

	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0

Пусть отношение ρ определено в соответствии с изображением на рисунке 2.1.

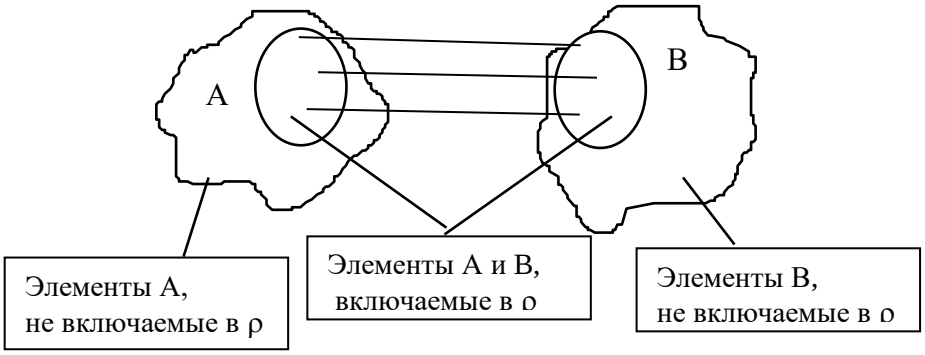

Рисунок –5. Бинарное отношение ρ.

Рассмотрим элементы множеств A и B, находящиеся в отношении ρ. Они имеют специальные названия.

Определение: Свяжем с каждым бинарным отношением ρ, определенным на множествах A и B, $\rho \subseteq A \times B$, два множества - *область определения* D(ρ) *и область значений* R(ρ). Они определяются следующим образом.

$D(\rho) = \{x \mid (x, y) \in \rho\}$,

$R(\rho) = \{y \mid (x, y) \in \rho\}$.

Пример : $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$\rho = \{(x, y) \mid x, y \in A,\ x$ - делитель $y,\ x \le 5\}$.

Тогда: $D(\rho) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R(\rho) = A$.

Пример: Предположим, что мы имеем некоторую программу, она читает два числа из множества $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, обозначенных x и y, и

если $x < y$, печатает число z (так же из A) такое, что $x \le z < y$. В любом случае программа останавливается после считывания всех чисел из A. Задача определяет отношение $\gamma \subseteq A^2 \times A$ такое, что $\gamma=\{((x,y),z)|x<y,x\le z<y\}$. Не все входные данные приводят к выдаче результата. Поэтому область определения отношения γ не совпадает с A^2 . Ясно, что

γ = {((1,2),1), ((1,3),1), ((1,3),2), ((1,4),1), ((1,4),2), ((1,4),3), ((1,5),1), ((1,5),1), ((1,5),2), ((1,5),3), ((1,5),4), ((2,3),2), ((2,4),2), ((2,4),3), ((2,5),2), ((2,5),3), ((2,5),4), ((3,4),3), ((3,5),3), ((3,5),3), ((3,5),4), ((4,5),4)}.

$D(\gamma)$ = {(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)},

$R(\gamma)$ = {1, 2, 3, 4}.

Определение: Пусть ρ - бинарное отношение. Определим *обратное отношение* ρ^{-1} следующим образом: $\rho^{-1}= \{(x, y) \mid (y, x) \in \rho\}$.

Таким образом, ρ^{-1} связывает те же пары элементов, что и ρ, но “в другом порядке”. Следовательно, если $\rho^{-1} \subseteq B \times A$, то $D(\rho^{-1})=R(\rho)$ и $R(\rho^{-1})=D(\rho)$. В дальнейшем будем записывать без скобок D_ρ и R_ρ.

Задание к лекции:

1. Записать отношение «a делится на b» всеми возможными способами для множеств A={12, 13, 24}, B={1, 3, 4, 5}. Определить область определения и область значений.

2. Привести пример унарного, бинарного отношений на множестве людей.