Уважаемые студенты!

- Вам необходимо разобрать примеры решения задач;
- Написать коспект (кратко);
- Фотоотчет конспекта предоставить на электронную почту hvastov@rambler.ru,
- При возникновении вопросов обращаться по телефону 0721098278 (WatsApp).

Практическое занятие
Тема: Решения задач на пирамиду и усечённую пирамиду
Цель: Систематизировать изученный материал. Разобрать типичные задачи по данной теме

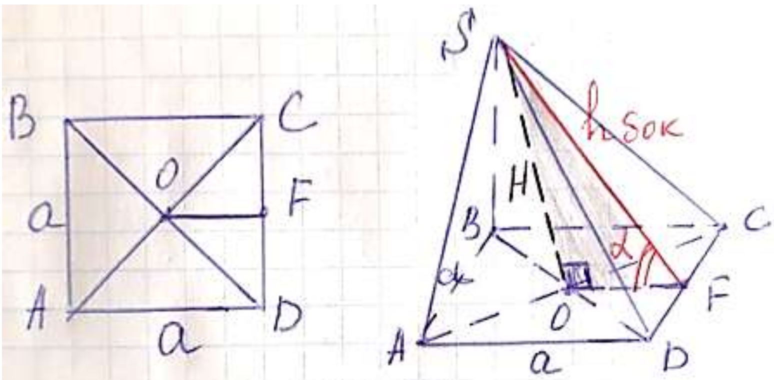
Задача № 1

Найти площадь боковой и полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды, если сторона основания равна **8** см, а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен **30°**. Найти объём пирамиды.

Дано:
SABCD - правильная пирамида;
a = 8см - сторона основания;
α = 30°-угол между боковой гранью и плоскостью основания

Найти: 1) $S_{бок}$ -?
2) $S_{пол\ пов}$ -?
3) V - ?

Решение



1. Так как пирамида правильная, то ABCD - **квадрат,** и вершина пирамиды проектируется в его центр - точку O пересечения диагоналей.

2. *По определению* величина двугранного угла равна величине его **линейного угла**, который образован двумя перпендикулярами к ребру (по свойству сторон линейного угла):

α = ∠SFO = 30°, т.к. SF⊥CD (как апофема) и OF⊥CD (***по тереме от трёх перпендикулярах***).

3. *По определению* перпендикулярности прямой и плоскости:
SO⊥OF, т.к. SO⊥(ABC) и прямая OF⊂(ABC).
Значит, ΔSOF - прямоугольный.

4. Решим прямоугольный ΔSOF: $\cos\alpha = \frac{OF}{SF}$,

где $OF = \frac{a}{2}$. Тогда $OF = \frac{8}{2} = 4$ (см), получим: $\cos 30° = \frac{4}{SF}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{SF}$, отсюда

по свойству пропорции: $\sqrt{3} \cdot SF = 2 \cdot 4$, $SF = \frac{8}{\sqrt{3}}$ (см).

Итак, нашли апофему пирамиды $h_{бок} = SF = \frac{8}{\sqrt{3}}$ см.

$\sin\alpha = \frac{SO}{SF}$, отсюда $\sin 30° = \frac{SO}{\frac{8}{\sqrt{3}}}$,

$\frac{1}{2} = \frac{SO}{\frac{8}{\sqrt{3}}}$, применим свойство пропорции: $2 \cdot SO = 1 \cdot \frac{8}{\sqrt{3}}$, находим $SO = \frac{4}{\sqrt{3}}$ (см).

Значит, высота пирамиды **H** = SO = $\frac{4}{\sqrt{3}}$ см.

5. Площадь основания пирамиды: $S_{осн\ пирам} = a^2$ (площадь квадрата)

$S_{осн} = 8^2 = 64$ (см^2)

6. ***По теореме о площади боковой поверхности правильной пирамиды:***

$\mathbf{S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot P_{осн} \cdot h_{бок}}$, где периметр основания пирамиды $P_{осн} = 4a$;

$P_{осн} = 4 \cdot 8 = 32$ (см); тогда $S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{128}{\sqrt{3}}$ (см^2)

7. ***Площадь полной поверхности пирамиды*** равна сумме площадей её основания и боковой поверхности: $\mathbf{S_{пол\ пов} = S_{осн} + S_{бок}}$

$S_{пол\ пов} = 64 + \frac{128}{\sqrt{3}} \approx 137{,}90$ (см^2)

8. ***Объём пирамиды:*** $\mathbf{V_{пир} = \frac{1}{3} \cdot S_{осн} \cdot H}$

$V_{пир} = \frac{1}{3} \cdot 64 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{256}{3\sqrt{3}}$ (см^3) $\approx 49{,}27$(см^3).

Ответ: $S_{бок} = \frac{128}{\sqrt{3}}$ (см^2), $S_{полн} \approx 137{,}90$ (см^2), $V_{пир} \approx 49{,}27$(см^3).

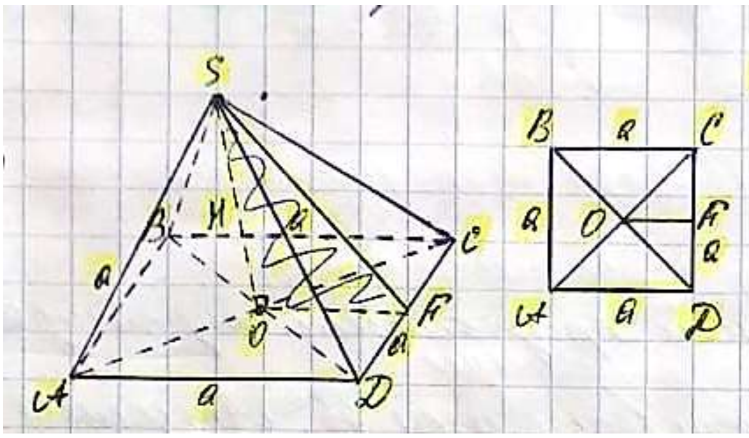
Задача № 2

Найти площадь боковой и полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды, если сторона основания равна 4см, а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен 60^0.

Решение

Дано:
SABCD - правильная пирамида
a=4см-сторона основания
α = 60°- угол между боковой гранью и плоскостью основания

Найти: 1) $S_{бок}$-?
2) $S_{пол\ пов}$-?



1. Т.к. пирамида правильная, то ABCD - квадрат, и вершина проектируется в его центр, точку пересечения диагоналей.

2. Величина двугранного угла равна величине его линейного угла, который образован двумя перпендикулярами к ребру: α = ∠SFO = 60°, т.к SF⊥CD (как апофема) и OF⊥CD (по тереме о 3-х перпендикулярах).

3. По определению перпендикулярности прямой и плоскости: $SO\perp OF$, т.к. $SO\perp(ABC)$ и прямая $OF\subset(ABC)$, значит ΔSOF- прямоугольный.

4. Решим прямоугольный ΔSOF: $\cos\alpha=\frac{OF}{SF}$, $\cos 60°=\frac{2}{SF}$; $\frac{1}{2}=\frac{2}{SF}$; $1\cdot SF=2\cdot 2$, отсюда $SF=4$ (см)

5. Площадь основания пирамиды: $S_{осн\ пирам}=a^2$ (площадь квадрата)

$S_{осн}=4^2=16$ (см^2)

6. ***По теореме о площади боковой поверхности правильной пирамиды:***

$S_{бок}=\frac{1}{2}\cdot P_{осн}\cdot h_{бок}$, где $P_{осн}=4a$; $P_{осн}=4\cdot4=16$ см

$S_{бок}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 16=32$(см^2)

7. ***Площадь полной поверхности пирамиды*** равна сумме площадей её основания и боковой поверхности: $\mathbf{S_{пол\ пов}=S_{осн}+S_{бок}}$

$S_{пол\ пов}=16+32=48$(см^2)

Ответ: $S_{бок}=32$ см^2; $S_{пол\ пов}=48$ см^2

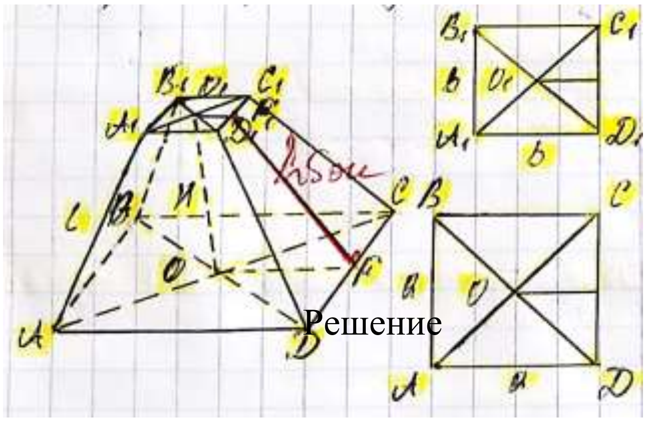
Задача № 3

Найти апофему правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если известно, что стороны оснований имеют длину 4см и10см, а длина бокового ребра пирамиды равна 5см.

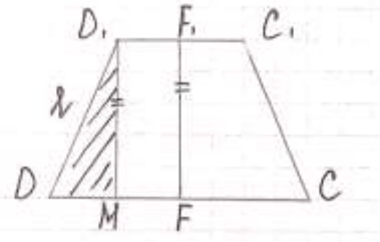
Решение

Дано:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$- правильная усеч. пирамида
a=10см
b=4см- стороны основания;
$l=AA_1=5$см- длина бокового ребра

Найти: $h_{бок}$ - апофему



1. Боковой гранью правильной усечённой пирамиды является равнобедренная трапеция DD_1CC_1: тогда $DF=\frac{a}{2}$; $D_1F_1=\frac{b}{2}$



2. Проведём перпендикуляр D_1M: $D_1M\perp DC$

3. $D_1M \parallel DC$, тогда $D_1M = FF_1 = h_{бок}$ и $DM = DF - MF = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$

$DM = \frac{10}{2} - \frac{4}{2} = 5 - 2 = 3$ (см)

4. По теореме Пифагора из ΔD_1MD: $D_1D^2 = DM^2 + D_1M^2$

$5^2 = 3^2 + D_1M^2$, отсюда находим $D_1M = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$ (см).

Ответ: $h_{бок} = 4$ см

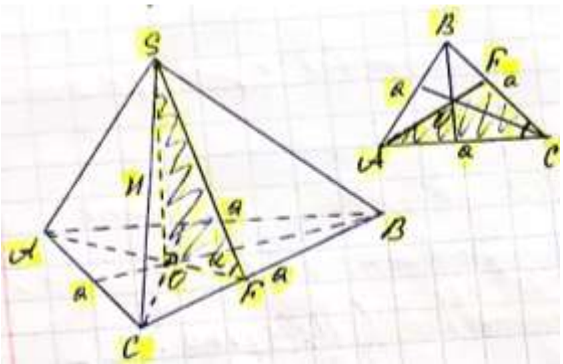
Задача № 4

Боковая грань правильной треугольной пирамиды образует с плоскостью основания угол 45^0. Апофема пирамиды равна $3\sqrt{2}$ см. Найти объем пирамиды.

Решение

Дано:
SABC - правильная пирамида
$h_{бок} = 3\sqrt{2}$ см - апофема
$\alpha = 45°$- угол между боковой гранью и плоскостью её основания

Найти: $\mathbf{V_{пир}}$



1. Пирамида правильная, значит ΔABC - ***равносторонний***, и вершина S проектируется в центр основания в точку O пересечение медиан треугольника.
2. ***Линейным углом*** заданного двугранного угла между боковой гранью и плоскостью основания, является угол $\angle SFO$, т.к. он образован двумя перпендикулярами к ребру BC:
   $SF \perp BC$ (как апофема) и $OF \perp BC$ (***по теореме о трех перпендикулярах***)
   Значит, $\angle SFO = \alpha = 45°$
3. ***По определению перпендикулярности прямой и плоскости***: $SO \perp OF$, т.к. $SO \perp (ABC)$ и прямая $OF \subset (ABC)$, значит ΔSOF - прямоугольный.
4. Решим прямоугольный ΔSOF: $\sin\alpha = \frac{SO}{SF}$

   $\sin 45° = \frac{SO}{3\sqrt{2}}$, отсюда находим: $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{SO}{3\sqrt{2}}$, $2 \cdot SO = \sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}$, **SO** $= \frac{6}{2} = 3$(см).

   $OF = SO = 3$(см), т.к. Δ***SOF - равнобедренный прямоугольный треугольник***.

5. ***Точка пересечения медиан любого треугольника делит каждую медиану в отношении 2:1,*** поэтому **AF =3· OF** и $OF = \frac{1}{3} \cdot AF$

   AF $= 3 \cdot 3 = 9$ (см)

6. Решим прямоугольный ΔAFC: $\sin\angle C = \frac{AF}{AC}$, где AC = a

$\sin 60° = \frac{9}{a}$, отсюда находим: $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{a}$; $a\cdot\sqrt{3} = 2\cdot 9$; $\mathbf{a} = \frac{18}{\sqrt{3}} = \frac{18\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$ (см)

7. Объём пирамиды: $\mathbf{V_{пир} = \frac{1}{3} \cdot S_{осн} \cdot H}$, где высота пирамиды H = S0 =3см

Площадь основания пирамиды равна площади равностороннего треугольника:

$\mathbf{S_{осн}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; тогда вычисляем $S_{осн} = \frac{(6\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \mathbf{27\sqrt{3}}$ (см^2)

$V_{пир} = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot 27\sqrt{3} = \mathbf{27\sqrt{3}}$ (см^3) ≈ 46,77 (см^3)

Ответ: $V_{пир} = 27\sqrt{3}$ ≈ 46,77 см^3

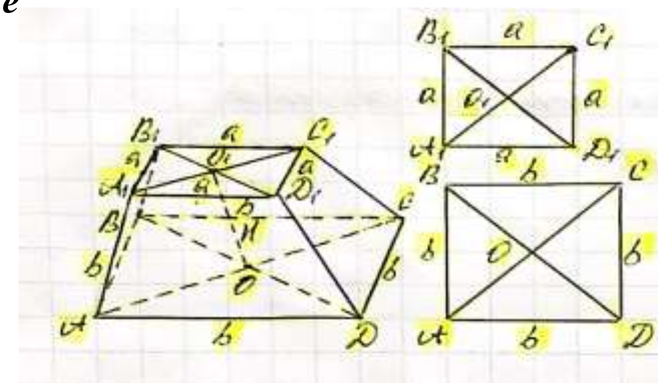
Задача № 5

Основаниями правильной усеченной пирамиды являются квадраты со сторонами 10см и 20см. Высота усечений пирамиды равна 60см. Найти ее объем.

Решение

Дано:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$-правильная усеч. пирамида;
a = 10см
b = 20см- стороны оснований;
H = 60см- высота

Найти: : $\mathbf{V}$ **усеч. пир**



1.Т.к. основания правильной четырёхугольной усеченной пирамиды являются квадратами, то $\mathbf{S_{осн} = a^2}$

$S_{осн_1} = a^2 = 10\cdot 10 = \mathbf{100}$ (см^2)- площадь меньшего основания – квадрата $A_1B_1C_1D_1$;

$S_{осн} = b^2 = 20\cdot 20 = \mathbf{400}$ (см^2)- площадь большего основания

2. Объем правильно усеченной пирамиды:

$\mathbf{V_{усеч.\ пир} = \frac{1}{3} \cdot H \cdot (S_{осн_1} + S_{осн} + \sqrt{S_{осн_1} \cdot S_{осн}}}$

$V_{усеч\ пир} = \frac{1}{3} \cdot 60 \cdot (100+400 + \sqrt{100 \cdot 400} = 20\cdot(100+400+200) = \mathbf{14000}$ (см^3)

Ответ: $V_{усеч.\ пир} = 14000$ см^3