

Задание:

- Изучить теорию;
- Написать краткий конспект;
- Разобрать примеры решения;
- Ответить на вопросы;
- По вопросам обращаться 072-1098278 или hvastov@rambler.ru
- Фотоотчёт конспекта прислать в течении 3 дней со дня получения задания на hvastov@rambler.ru

Тема: ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ И НА БЕСКОНЕЧНОСТИ. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕДЕЛОВ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ.

Цели:

- Дать понятие предела функции в точке и при стремлении аргумента к бесконечности. Сформулировать теоремы о пределах. Научить студентов находить предел функции в точке и на бесконечности. Сформулировать замечательные пределы и научить решать примеры к ним сводящиеся.
- В процессе решения примеров на вычисление пределов развивать у студентов продуктивное мышление, интерес к подсчетам, осознанное отношение к учебному материалу, имеющему большое применение в курсе математики.
- Прививать интерес к математике, используя исторические экскурсы. Указать, что вместе с развитием понятия функции развивалось и понятие предела функции. Сначала ввести понятие предела функции пытался Исаак ньютон, но только в 19 столетии в работах Вейерштрасса, Больцано, Коши и Дирихле сложилось определение и обозначение пределов функций, которое используется в наше время.

Мотивация. Из всех видов пределов, изучаемых в курсе математики для техникумов, главную роль играет понятие конечного предела функции в точке. Именно этот предел лежит в основе понятия производной. Показать применение понятия предела при $x \rightarrow \infty$ в разных технических применениях. Можно привести много примеров из физики, химии и других наук, показывающих переход количественных изменений в качественные на протяжении определенного промежутка времени. Так, например, масса куска радиоактивного элемента уменьшается со временем. При этом, сколько б не было вещества вначале, через некоторый промежуток времени этого элемента станет вполтину меньше от начального количества.

План

1. Предел функции в точке. Определение Гейне и Коши.
2. Теоремы о пределах.
3. Вычисление пределов функции в точке.
4. Раскрытие неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$.
5. Односторонние пределы.
6. Предел функции на бесконечности.
7. Число e .
8. Замечательные пределы.
9. Вычисление пределов функции на бесконечности, раскрытие неопределенностей.

Предел функции в точке. Определение Гейне и Коши

Предел функции в точке – одно из основных понятий математического анализа. Предел функции (предельное значение функции) в заданной точке, предельной для области определения функции, — такая величина, к которой стремится значение рассматриваемой функции при стремлении её аргумента к данной точке.

Предел функции является обобщением понятия предела последовательности: изначально под пределом функции в точке понимали предел последовательности элементов области значений функции, составленной из образов точек последовательности элементов области определения функции, сходящейся к заданной точке (предел в которой рассматривается); если такой предел существует, то говорят, что функция сходится к указанному значению; если такого предела не существует, то говорят, что функция расходится.

Наиболее часто определение предела функции формулируют на языке окрестностей.

Определение предела функции в точке по Коши. Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при x , стремящемся к a (или в точке a), если для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ , что при всех $x \neq a$, таких, что $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

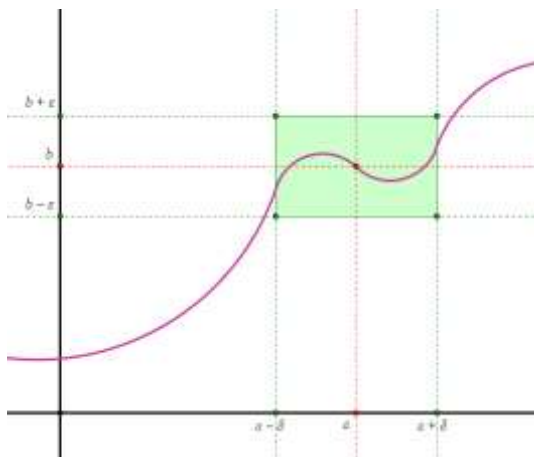
Определение предела функции в точке по Гейне. Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при x , стремящемся к a (или в точке a), если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к a (стремящейся к a , имеющей пределом число a), причем ни при каком значении n $x_n \neq a$, последовательность $\{y_n = f(x_n)\}$ сходится к b .

Данные определения предполагают, что функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a , кроме, быть может, самой точки a .

Определения предела функции в точке по Коши и по Гейне эквивалентны: если число b служит пределом по одному из них, то это верно и по второму. Также из определения следует, что функция не может иметь разные пределы в одной точке.

Указанный предел обозначается так: $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Геометрически существование предела функции в точке по Коши означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать на координатной плоскости такой прямоугольник с основанием $2\delta > 0$, высотой 2ε и центром в точке $(a; b)$, что все точки графика данной функции на интервале $(a - \delta; a + \delta)$, за исключением, быть может, точки $M(a; f(a))$, лежат в этом прямоугольнике – см. рис.:



Теоремы о пределах:

- 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$
- 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$
- 3) $\lim_{x \rightarrow x_0} k f(x) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x);$
- 4) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0 \right).$

В общем случае решение пределов сводится к замене x числом или выражением a .

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} = \frac{2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 5}{1 + 1} = \frac{-6}{2} = -3.$$

Решение упражнений: $\lim_{x \rightarrow -1} (3x + 4); \lim_{x \rightarrow -1} (-2x + 1); \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x - 1}{2 - 3x}; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x - 2}{2x + 3}.$

Введем **правило 1**: раскрытие неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0} \right]$. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left[\frac{0}{0} \right]$ необходимо числитель и знаменатель дроби разложить на множители (с помощью формул сокращенного умножения, вынесением общего множителя, разложением квадратного трехчлена на множители) и сократить.

Пример. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} = \frac{0}{0} = (*)$

Разложим числитель на множители.

$$2x^2 - 3x - 5 = 0$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 9 + 40 = 49$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{49} = 7$$

$$x_1 = \frac{-(-3) - 7}{2 \cdot 2} = \frac{3 - 7}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$x_2 = \frac{-(-3) + 7}{2 \cdot 2} = \frac{3 + 7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$2x^2 - 3x - 5 = 2(x + 1) \cdot \left(x - \frac{5}{2} \right) = (x + 1) \cdot (2x - 5)$$

$$(*) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1) \cdot (2x - 5)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (2x - 5) = -2 - 5 = -7$$

Решение упражнений: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + x^2}{x^4 + x^2} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6;$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Решение упражнений: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^3-1}; \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-2x-3}; \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)^2}{x^2-7x+12}; \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2-8x-3}{3x-x^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+5x-6}{x^2+12x+20}; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-x-6}{2x^2-7x+6}; \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-27}{x^2-5x+6}.$$

Односторонние пределы

Символом $\lim_{n \rightarrow a-0} f(x)$ обозначается левосторонний предел, в котором переменная x , приближаясь к a , принимает значения $x < a$. Соответствующий предел $\lim_{n \rightarrow a} f(x)$ называется *левосторонним пределом функции $f(x)$ в точке $x=a$* .

Аналогично, символом $\lim_{n \rightarrow a+0} f(x)$ обозначается правосторонний предел, в котором переменная x , приближаясь к a , принимает значения $x > a$. Соответствующий предел $\lim_{n \rightarrow a+0} f(x)$ называется *правосторонним пределом функции $f(x)$ в точке $x=a$* .

Отметим, что двусторонний предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ существуют лишь тогда, когда существуют оба односторонних предела, которые равны друг другу, то есть $\lim_{n \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{n \rightarrow a-0} f(x)$. В этом случае $\lim_{n \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{n \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{n \rightarrow a} f(x)$.

Предел функции на бесконечности.

Пусть задана функция $y = f(x)$ с неограниченной сверху областью определения. Число b называется пределом данной функции при x , стремящемся к плюс бесконечности, если для любого числа существует такое положительное число M , что при всех значениях аргумента x из области определения, таких, что $x > M$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \epsilon$. Запись этого факта: $b = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x)$.

Если область определения данной функции неограниченна снизу, то число b называется пределом данной функции при x , стремящемся к минус бесконечности, если для любого числа $\epsilon < 0$ существует такое положительное число M , что при всех значениях аргумента x из области определения, таких, что $x < -M$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \epsilon$. Записывается это так: $b = \lim_{n \rightarrow -\infty} f(x)$.

Число e

Рассмотрим **пример Я. И. Перельмана**, дающий интерпретацию числа e в задаче о сложных процентах. Число e есть предел $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. В сбербанках процентные деньги присоединяются к основному капиталу ежегодно. Если присоединение совершается чаще, то капитал растет быстрее, так как в образовании процентов участвует большая сумма. Возьмем чисто теоретический, весьма упрощенный пример. Пусть в банк положено 100 ден. ед. из расчета 100 % годовых. Если процентные деньги будут присоединены к основному капиталу лишь по истечении года, то к этому сроку 100 ден. ед. превратятся в 200 ден.ед. Посмотрим теперь, во что превратятся 100 ден. ед., если процентные деньги присоединять к основному капиталу каждые полгода. По истечении полугодия 100 ден. ед. вырастут в $100 \cdot 1,5 = 150$, а еще через полгода - в $150 \cdot 1,5 = 225$ (ден. ед.). Если присоединение делать каждые $1/3$ года, то по истечении года 100 ден. ед. превратятся в $100 \cdot (1 + 1/3)^3 \approx 237$ (ден. ед.). Будем учащать сроки присоединения процентных денег до 0,1 года, до 0,01 года, до 0,001 года и т.д. Тогда из 100 ден. ед. спустя год получится:

$$100 \cdot (1 + 1/10)^{10} \approx 259 \text{ (ден. ед.)},$$

$$100 \cdot (1 + 1/100)^{100} \approx 270 \text{ (ден. ед.)},$$

$$100 \cdot (1 + 1/1000)^{1000} \approx 271 \text{ (ден. ед.)}.$$

При безграничном сокращении сроков присоединения процентов наращенный капитал не растет беспредельно, а приближается к некоторому пределу, равному приблизительно 271. Более чем в 2,71 раз капитал, положенный под 100% годовых, увеличиться не может, даже если бы выросшие проценты присоединялись к капиталу каждую секунду, потому что предел $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. Это число является трансцендентным и приблизительно равно 2.718281828... (2.7, затем два раза год рождения Л.Н.Толстого).

«Замечательные» пределы

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx} = 1 - \text{первый «замечательный предел»};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e - \text{второй «замечательный предел»}.$$

«Замечательными пределами» пользуются для нахождения пределов некоторых функций, если функция содержит синус в задании или же является степенно-показательной.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 5 \cdot \frac{\sin 5x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} 5 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 5 \cdot 1 = 5.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{\frac{2x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

Нахождение пределов функций при $x \rightarrow \infty$.

Из рассмотренного в начале занятия примера следует, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$. Этот факт используется для вычисления пределов на бесконечности. Соответственно, функция, которая на бесконечности имеет предел, равный 0, называется *бесконечно малой*.

Учтем, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$ и вообще $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$, где α - постоянная величина.

$\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$ - это *бесконечно большая* функция. Этот предел также используют для нахождения пределов сложных функций. ($\lim_{x \rightarrow \infty} (kx + b) = \infty$)

Для пределов функций на бесконечности сохраняются все свойства пределов функций в точке.

$$\text{Пример 1. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} + 3\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 = 0 + 3 = 3.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 5x + 1}{2x^2 + 4} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{4}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{4}{x^2}\right)} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x^2}} = \frac{1 + 0 + 0}{2 + 0} = \frac{1}{2}. \blacksquare\end{aligned}$$

Введем **правило 2**: если при нахождении предела функции на бесконечности получили отношение $\frac{\infty}{\infty}$, то нужно числитель и знаменатель дроби поделить на наивысшую степень переменной.

Решение упражнений. Найти пределы:

$$\begin{aligned}1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sqrt{7}x^3}{7x^3 + 3} &= \frac{\sqrt{7}}{7}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + x^2}{1 - x^3 + x} = 0; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 1}{1 - x - x^2} = \infty; \\ 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{1 - x^2} &= 0; \quad 5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sqrt{9x^4 + 2x^3}}{x^2 - 3x + 1} = -3.\end{aligned}$$

Правило 3: если при нахождении предела функции на бесконечности получили отношение $\infty - \infty$, то нужно одновременно умножить и разделить на сопряженное выражение (получим $\frac{\infty}{\infty}$ или $\frac{0}{0}$).

$$\begin{aligned}1) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3})(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-3})}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-3})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-3}} = 0. \\ 2) \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 5} - x) &= 2,5.\end{aligned}$$

I. Закрепление изученного материала.

Контрольные вопросы:

1. Что называют пределом функции в точке?
2. Сколько пределов может иметь функция в точке?
3. Сформулируйте теорему о пределе суммы (разности) функций в точке.
4. Сформулируйте теорему о пределе произведения функций в точке.
5. Сформулируйте теорему о пределе частного функций в точке.
6. Что называют пределом функции при $x \rightarrow \infty$?
7. Какая функция называется бесконечно малой?
8. Какая функция называется бесконечно большой?
9. Чему равно число e ?
10. Назовите «замечательные» пределы.

II. Домашнее задание. По программе [1] Г.V §16-17, [2] Г.6 §4

III. Подведение итогов занятия.