Задание

1. Ознакомиться с теоретический материалом темы, составить план к лекции, законспектировать по составленному плану. Решить задания у лекции.

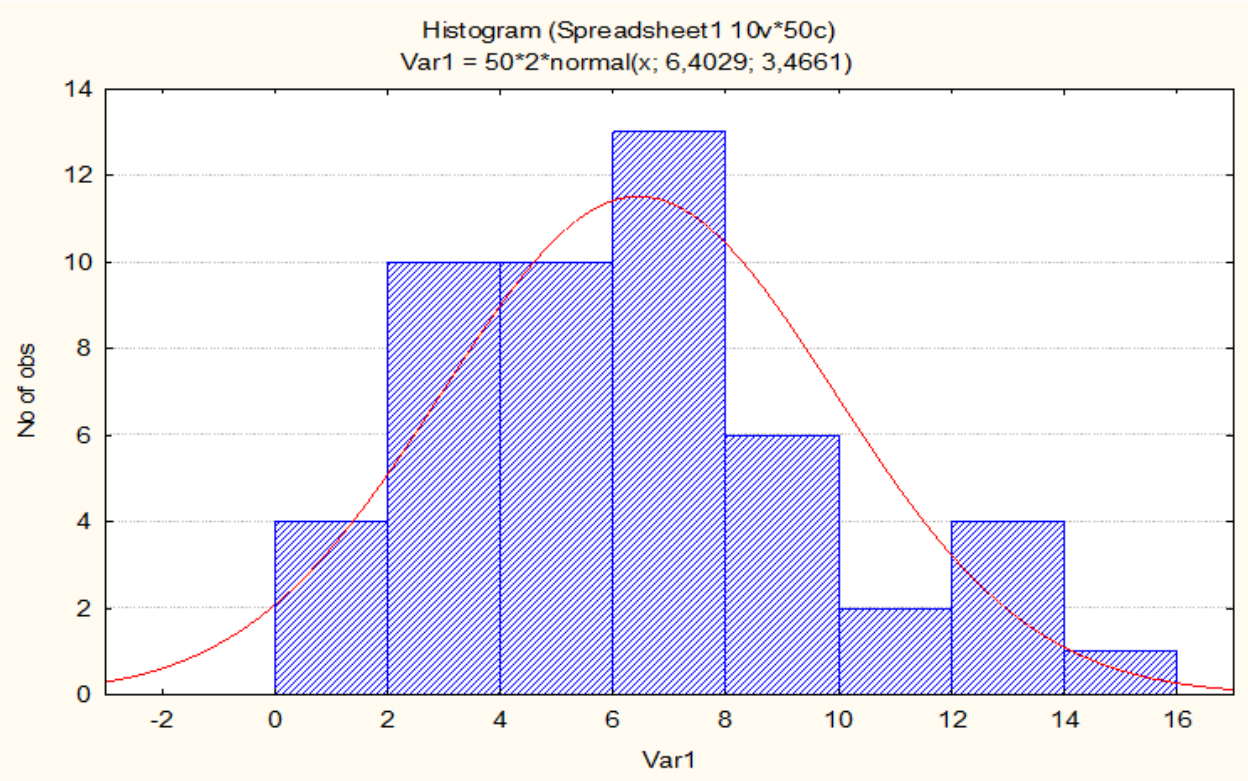
4. Фотоотчет и сообщение присылать на электронную почту

С уважением, Хвастова Светлана Ивановна

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721389311 (ватсап). Электронная почта: xvsviv@rambler.ru

Тема лекции: «Нормальное распределение случайной величины»

Примерами случайных величин, распределённых по нормальному закону, являются рост человека, масса вылавливаемой рыбы одного вида. ***Нормальность распределения означает следующее***: существуют значения роста человека, массы рыбы одного вида, которые на интуитивном уровне воспринимаются как "нормальные" (а по сути - усреднённые), и они-то в достаточно большой выборке встречаются гораздо чаще, чем отличающиеся в бОльшую или меньшую сторону.



Нормальное распределение вероятностей непрерывной случайной величины (иногда - распределение Гаусса) можно назвать колоколообразным из-за того, что симметричная относительно среднего функция плотности этого распределения очень похожа на разрез колокола (красная кривая на рисунке выше).

Вероятность встретить в выборке те или иные значение равна площади фигуры под кривой и в случае нормального распределения мы видим, что под верхом "колокола", которому соответствуют значения, стремящиеся к среднему, площадь, а значит, вероятность, больше, чем под краями. Таким образом, получаем то же, что уже сказано: вероятность встретить человека "нормального" роста, поймать рыбу "нормальной" массы выше, чем для значений, отличающихся в бОльшую или меньшую сторону. В очень многих случаях практики ошибки измерения распределяются по закону, близкому к нормальному.

Нормальное распределение

Нормальным *называется распределение вероятностей случайной величины, которое описывается плотностью*

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Нормальное распределение определяется двумя параметрами μ и σ, μ – математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение, e=2,71828... - основание натурального логарифма, π=3,1416...

Свойства функции плотности нормального распределения

- для всех значений аргумента функция плотности положительна;
- если аргумент стремится к бесконечности, то функция плотности стреится к нулю;
- функция плотности симметрична относительно среднего значения: $f(\mu+x)=f(\mu-x)$;

- наибольшее значение функции плотности - у среднего значения: $f_{\max}(x) = f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$;
- кривая функции плотности выпукла в интервале $(\mu - \sigma);\ (\mu + \sigma)$ и вогнута на остальной части;
- мода и медиана нормального распределения совпадает со средним значением;
- при нормальном распределении коэффициенты ассиметрии и эксцесса равны нулю (подробнее рассмотрим это свойство в следующем параграфе о приближенном методе проверки нормальности распределения).

График плотности нормального распределения называют нормальной кривой (кривой Гаусса). Функция *f(x)* определена на всей оси *x,* при всех значениях *x* нормальная кривая расположена над осью *Ox*. Ось *Ox* служит горизонтальной асимптотой графика (рис. 1.); при $x = \mu$ функция имеет максимум, равный $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

Влияние параметров нормального распределения на форму нормальной кривой

Изменение величины параметра μ (математического ожидания) не изменяет формы нормальной кривой, а приводит лишь к ее сдвигу вдоль оси *Ox*: вправо, если μ возрастает, и влево, если μ убывает.

Если изменяется параметр σ (среднее квадратическое отклонение). Так как максимум дифференциальной функции нормального распределения равен $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

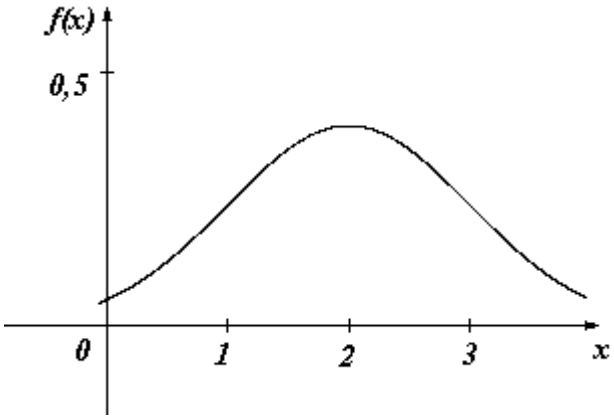


Рис. 1. Кривая Гаусса при $\mu = 2, \quad \sigma = 1$

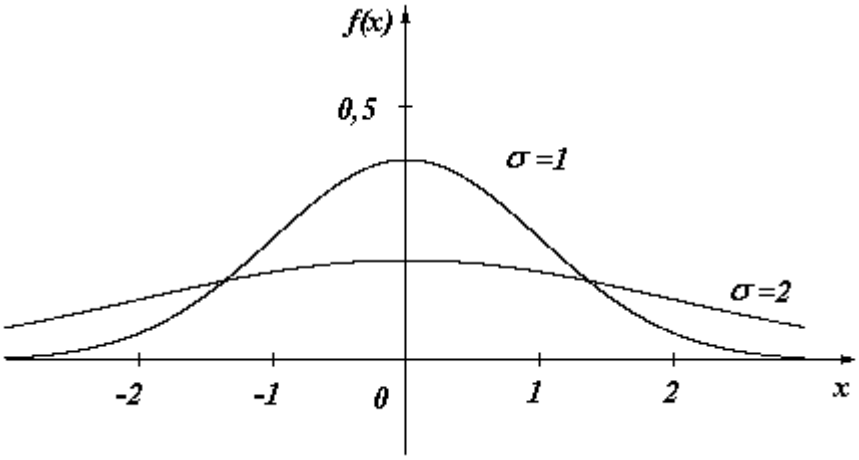


Рис. 2

Отсюда следует, что с возрастанием σ максимальная ордината нормальной кривой убывает, а сама кривая становится более пологой, т. е. сжимается к оси *Ox*; при убывании σ нормальная кривая становится более островершинной и растягивается в положительном направлении оси *Oy* (рис.2). Подчеркнем, что при любых значениях параметров μ и σ площадь, ограниченная нормальной кривой и осью *x*, остается равной единице.

Изменения среднего значения μ перемещают кривую функции плотности нормального распределения в направлении оси *Ox*. Если μ возрастает, кривая перемещается вправо, если μ уменьшается, то влево.

Если меняется стандартное отклонение, то меняется высота вершины кривой. При увеличении стандартного отклонения вершина кривой находится выше, при уменьшении - ниже.

Стандартное нормальное распределение (стандартное распределение Лапласа–Гаусса или нормированное нормальное распределение) – это распределение вероятностей стандартизованной нормальной случайной величины *Z*, плотность распределения которой равна:

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$$

при - ∞ <z< + ∞

Значения функции *Ф(z)* определяется по формуле:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \phi(z)dz = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz$$

Значения функции *Ф(z)* и плотности *ф(z)* нормированного нормального распределения рассчитаны и сведены в таблицы (табулированы). Таблица составлена только для положительных значений *z* поэтому:

Ф (–z) = 1–Ф (z)

С помощью этих таблиц можно определить не только значения функции и плотности нормированного нормального распределения для заданного *z*, но и значения функции общего нормального распределения, так как:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(z);$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\phi(x).$$

Вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины

Если случайная величина ***X*** задана функцией плотности распределения вероятностей, то вероятность того, что в результате испытания ***X*** примет какое-нибудь значение из интервала *(a, b)*, равна определенному интегралу от плотности вероятности в пределах от *a* до *b*, то $P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

Если случайная величина распределена по нормальному закону, то

можно доказать, что $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$.

Решение задач

Пример 1. Нормально распределенная случайная величина X задана дифференциальной функцией $f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{50}}$. Найти математическое ожидание и дисперсию X.

Ответ. *M(X)=1; D(X)=25.*

Пример 2. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 30 и 10. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (10, 50)

Решение. Если случайная величина распределена по нормальному закону, то $P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$, где *Ф(x)* – функция Лапласа (приложение 2, стр 462, учебник Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика, точка доступа / http://lib.maupfib.kg/wp-content/uploads/2015/12/Teoria_veroatnosty_mat_stat.pdf).

$$P(10 < X < 50) = \Phi\left(\frac{50 - 30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10 - 30}{10}\right) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0.9544$$

Пример 3.

Случайная величина распределена по нормальному закону с математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением, соответственно равными 10 и 5. Найти вероятность того, что X примет значение на интервале (20, 30).

Решение:

Воспользуемся формулой . По условию

$$a = 10,\ \sigma = 5,\ \alpha = 20 \text{ и } \beta = 30.$$

Следовательно,

$$P(20 < X < 30) = \Phi\left(\frac{30-10}{5}\right) - \Phi\left(\frac{20-10}{5}\right) = \Phi(4) - \Phi(2).$$

По табл. 2 приложения находим соответствующие значения функции Лапласа и окончательно получаем:

$$P(20 < X < 30) = 0{,}5 - 0{,}4772 = 0{,}0228.$$

Пример 4.

Магазин продает мужские костюмы. По данным статистики, распределение по размерам является нормальным с математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением, соответственно равным 48 и 2. Определить процент спроса на костюмы 50-го размера при условии разброса значений этого размера в интервале (49, 51).

Решение:

По условию задачи $a = 48,\ \sigma = 2,\ \alpha = 49,\ \beta = 51.$ Используя формулу (2.66), получаем, что вероятность спроса на костюмы 50-го размера в заданном интервале равна:

$$P(49 < X < 50) = \Phi\left(\frac{51-48}{2}\right) - \Phi\left(\frac{49-48}{2}\right) =$$
$$= \Phi(1{,}5) - \Phi(0{,}5) = 0{,}4332 - 0{,}1915 = 0{,}2417.$$

Следовательно, спрос на костюмы 50-го размера составит около 24%, и магазину нужно предусмотреть это в общем объеме закупки.

Задания к лекции:

1. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 20 и 5. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение в интервале (15, 25).

2. Известно, что для человека pH крови является случайной величиной, имеющей нормальное распределение с математическим ожиданием 7,4 и средним квадратическим отклонением 0,2. Найти вероятность того, что уровень pH находится между 7,35 и 7,45 соответственно.