Уважаемые студенты!

Вам необходимо:

1. ***Записать тему лекции***
2. ***В соответствии с планом записать правила и примеры, типовые задачи.***
3. ***К лекции составить 5 контрольных вопросов. Ответы на них выделить красной вертикальной чертой на полях в конспекте.***
4. ***Выполненную работу прислать в виде скриншотов или фото на электронную почту xvsviv@rambler.ru***

ЛЕКЦИЯ на тему Понятие бинома Ньютона. Свойства бинома и биномиальных коэффициентов.

План

1. Понятие бинома Ньютона.
2. Свойства бинома и биномиальных коэффициентов
3. Типовые задачи по теме «Бином Ньютона»
4. Задачи, сводящиеся к использованию формулы бинома Ньютона (нестандартные задачи по теме «Бином Ньютона»)

1. Понятие бинома Ньютона

Биномом Ньютона называют разложение вида:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^n a^0 b^n =$$

$$= a^n + n a^{n-1} b^1 + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \ldots + \frac{n!}{(n-m)!\, m!} a^{n-m} b^m + \ldots + b^n, \text{ где } m < n$$

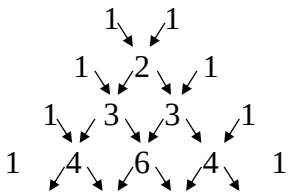
Но, строго говоря, всю формулу нельзя назвать биномом, так как «бином» переводится как «двучлен». Кроме того, формула разложения была известна еще до Ньютона, Исаак Ньютон распространил это разложение на случай n<0 и n – дробного.

Цель изучения бинома Ньютона – упрощение вычислительных действий.

Компоненты формулы «бином Ньютона»:

- правая часть формулы – разложение бинома;

- C_n^0; C_n^1; ... C_n^n – биномиальные коэффициенты, их можно получить с помощью ***треугольника Паскаля*** (пользуясь операцией сложения).



и так далее

Практическая значимость треугольника Паскаля заключается в том, что с его помощью можно запросто восстанавливать по памяти не только известные формулы квадратов суммы и разности, но и формулы куба суммы (разности), четвертой степени и выше.

Например, четвертая строчка треугольника как раз наглядно демонстрирует биномиальные коэффициенты для бинома четвертой степени:

$$(a+b)^4 = 1\cdot a^4 + 4\cdot a^3b + 6\cdot a^2b^2 + 4\cdot ab^3 + 1\cdot b^4$$

Альтернатива треугольнику Паскаля:

1) перемножить почленно четыре скобки:

$$(a+b)^4 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b) = a^4 + ...;$$

2) вспомнить разложение бинома Ньютона четвертой степени:

$$(a+b)^4 = C_4^0a^4b^0 + C_4^1a^3b^1 + C_4^2a^2b^2 + C_4^3a^1b^3 + C_4^4a^0b^4 =$$
$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1$$

✓ общий член разложения бинома n-й степени: $T_{m+1} = C_n^m a^{n-m} b^m$, $m = 0,1,2,...n$,

где Т – член разложения; $(m+1)$ – порядковый номер члена разложения.

2. Свойства бинома и биномиальных коэффициентов

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$

2. Число всех членов разложения на единицу больше показателя степени бинома, то есть равно $(n+1)$

3. Сумма показателей степеней a и b каждого члена разложения равна показателю степени бинома, то есть n

Доказательство

Рассмотрим $(m+1)$-й член разложения: $T_{m+1} = C_n^m a^{n-m} b^m$

Сумма показателей степеней a и b: $(n-m)+m = n$

Ч.т.д.

4. Биномиальные коэффициенты членов разложения, равноотстоящих от концов разложения, равны между собой: $C_n^m = C_n^{n-m}$ (правило симметрии)

5. Сумма биномиальных коэффициентов всех членов разложения равна 2^n

Доказательство

$$(a+b)^n = C_n^0a^nb^0 + C_n^1a^{n-1}b^1 + C_n^2a^{n-2}b^2 + ... + C_n^ma^{n-m}b^m + ... + C_n^na^0b^n$$

Пусть $a = 1, b = 1$, тогда:

- левая часть равна 2^n;
- правая часть равна

$$C_n^0 1^n 1^0 + C_n^1 1^{n-1} 1^1 + C_n^2 1^{n-2} 1^2 + ... + C_n^m 1^{n-m} 1^m + ... + C_n^n 1^0 1^n$$

Тогда: $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots C_n^n$

Ч.т.д.

6. Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах и равна 2^{n-1}

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}$$

7. Правило Паскаля: $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$

Доказательство – самостоятельно

8. Любой биномиальный коэффициент, начиная со второго, равен произведению предшествующего биномиального коэффициента и дроби $\frac{n-(m-1)}{m}$

$$C_n^m = C_n^{m-1} \cdot \frac{n-(m-1)}{m}$$

Доказательство – самостоятельно

3. Типовые задачи по теме «Бином Ньютона»

К типовым (стандартным) заданиям по данной теме можно отнести задачи на вычисление, среди которых:

1) Найти член (номер члена) разложения бинома
2) Вывести бином по известным членам разложения (по известной сумме)
3) Вычислить сумму биномиальных коэффициентов разложения бинома

и другие.

Пример 1. Найти средний член разложения бинома $(\frac{1}{\sqrt[5]{x}} + \sqrt[3]{x})^{10}$.

Решение. так как показатель степени бинома является четным числом, то в разложении этого бинома будет один наибольший член; стало быть, надо найти пятый член (T_5). Имеем $T_5 = C_{10}^5 (x^{\frac{1}{5}})^5 (x^{\frac{1}{3}})^5 = \frac{10!}{5!5!} \cdot x^{-1} \cdot x^{\frac{5}{3}} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot$ $\cdot x^{\frac{2}{3}} = 252\sqrt[3]{x^2}$.

Ответ: $T_5 = 252\sqrt[3]{x^2}$.

При разложении многочлена (полинома) $(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n$, чтобы, вычислить коэффициент при $a_1^{n_1} \cdot a_2^{n_2} \cdot \dots \cdot a_k^{n_k}$, мы выбираем скобки с указанными повторениями, т.е из n_1 скобок мы берем множитель a_1, из n_2 $-a_2$ и т.д. Он равен $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$.

Эти коэффициенты называют *полиномиальными* коэффициентами.

Пример 2. Возведем трехчлен $a+b+c$ в четвертую степень.

$$(a+b+c)^4 = a^4 + b^4 + c^4 + \frac{4!}{3!}a^3b + \frac{4!}{3!}a^3c + \frac{4!}{3!}b^3a + \frac{4!}{3!}b^3c + \frac{4!}{3!}c^3a + \frac{4!}{3!}c^3b +$$

$$+\frac{4!}{2!2!}a^2b^2+\frac{4!}{2!2!}a^2c^2+\frac{4!}{2!2!}b^2c^2+\frac{4!}{2!}a^2bc+\frac{4!}{2!}b^2ac+\frac{4!}{2!}c^2ab=$$
$$=a^4+b^4+c^4+4\left(a^3b+a^3c+b^3c\right)+6\left(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\right)+4\left(b^3a+c^3a+c^3b\right)+$$
$$+12\left(a^2bc+b^2ac+c^2ab\right).$$

При a^3b коэффициент равен $\frac{(3+1+0)!}{3!\cdot 1!\cdot 0!}=\frac{4!}{3!}$, при $a^2bc-\frac{(2+1+1)!}{2!\cdot 1!\cdot 1!}=\frac{4!}{2!}$ и т. д.

Пример 3.

В биномиальном разложении $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^{18}$ найти член разложения, не содержащий *x*

Решение

$$T_{m+1}=C_{18}^m\left(x^3\right)^{18-m}\left(\frac{1}{x^3}\right)^m=C_{18}^m\ x^{54-3m-3m}=C_{18}^m\ x^{54-6m}$$

Так как в разложении мы ищем член не содержащий *x*, то $54-6m=0\ \Rightarrow\ m=9$

Тогда $T_{9+1}=C_{18}^9=\frac{18!}{(18-9)!\ 9!}=\frac{10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16\cdot 17\cdot 18}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}=48620$

Ответ: 48620

Пример 4.

Раскрыть скобки и привести подобные члены в выражении $(3x+2y)^4$, используя формулу бинома Ньютона.

Решение.

$$(3x+2y)^4=C_4^0\cdot(3x)^0\cdot(2y)^4+C_4^1\cdot(3x)^1\cdot(2y)^3+C_4^2\cdot(3x)^2\cdot(2y)^2+C_4^3\cdot(3x)^3\cdot(2y)^1+$$
$$+C_4^4\cdot(3x)^4\cdot(2y)^0=16\cdot y^4+4\cdot 3\cdot x\cdot 8\cdot y^3+6\cdot 9\cdot x^2\cdot 4\cdot y^2+4\cdot 27\cdot x^3\cdot 2\cdot y+81\cdot x^4=$$
$$=16y^4+96xy^3+216x^2y^2+216x^3y+81x^4$$

Пример 5.

Найти коэффициент при x^2 в разложении $(2x+3)^6$.

Решение.

В данной задаче требуется найти коэффициент только при x^2, поэтому нет необходимости раскрывать все выражение по формуле бинома Ньютона. Достаточно рассмотреть только одно слагаемое

$$C_6^2(2x)^2 3^{6-2}=\frac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot 4\cdot x^2\cdot 3^4=15\cdot 4\cdot 81\cdot x^2=4860\cdot x^2.$$

Таким образом, x^2 в разложении $(2x+3)^6$ будет иметь коэффициент 4 860.

4. Задачи, сводящиеся к использованию формулы бинома Ньютона (нестандартные задачи по теме «Бином Ньютона»)

К нестандартным заданиям по данной теме можно отнести такие, в которых нет явного намека на необходимость использования бинома. Однако в итоге, решение сводится к нему и выглядит очень интересным.

Пример 6.

Доказать, что для любых $b>1$ и для любых $n>1$ верно ***неравенство Бернулли***:

$$b^n > 1 + n(b-1)$$

Доказательство

Пусть $b = 1 + t$

Так как $b>1$, то $1+t>1 \Rightarrow t>0$

Переформулируем требование: Доказать, что $(1+t)^n > 1+nt$, где $t>0, n>1$

$$(1+t)^n = C_n^0 \cdot 1^n \cdot t^0 + C_n^1 \cdot 1^{n-1} \cdot t^1 + C_n^2 \cdot 1^{n-2} \cdot t^2 + \ldots + C_n^m \cdot 1^{n-m} \cdot t^m + \ldots + C_n^n \cdot t^n =$$

$$= 1 + nt + \frac{n(n-1)}{2} t^2 + \ldots + C_n^m \cdot t^m + \ldots + t^n$$

Так как $n>1 \Rightarrow n \geq 2$, значит в разложении как минимум три члена разложения, тогда:

$$(1+t)^n \geq 1 + nt + \frac{n(n-1)}{2} t^2 > 1 + nt$$

Это означает, что $b^n > 1 + n(b-1)$

Ч.т.д.

Пример 7.

Доказать, что при любом натуральном *n* число $\left(4^n + 15n - 1\right)$ делится на 9

Доказательство

1 способ:

$$4^n = (3+1)^n = 3^n + C_n^{n-1} \cdot 3^{n-1} + C_n^{n-2} \cdot 3^{n-2} + \ldots + C_n^2 \cdot 3^2 + C_n^1 \cdot 3^1 + 1$$

$$4^n + 15n - 1 = \left(3^n + C_n^{n-1} \cdot 3^{n-1} + C_n^{n-2} \cdot 3^{n-2} + \ldots + C_n^2 \cdot 3^2 + C_n^1 \cdot 3^1 + 1\right) + 15n - 1 =$$

$$= 3 \cdot \left(3^{n-1} + n \cdot 3^{n-2} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3^{n-3} + \ldots + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3^1 + 6n\right) =$$

$$= 3 \cdot 3 \cdot \left(3^{n-2} + n \cdot 3^{n-3} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3^{n-4} + \ldots + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3^0 + 2n\right) \vdots\ 9$$

Ч.т.д.

2 способ:

Начнем рассматривать бином в общем виде:

$$(x+1)^n = x^n + n \cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot x^{n-2} + \ldots + \frac{n(n-1)}{2} \cdot x^2 + n \cdot x + 1 =$$

$$= x^2 \cdot \underbrace{\left(x^{n-2} + n \cdot x^{n-3} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot x^{n-4} + \ldots + \frac{n(n-1)}{2} \cdot x^0\right)}_{\text{обозначим выражение в скобках за } A} + n \cdot x + 1 = A \cdot x^2 + n \cdot x + 1$$

Тогда

$$4^n + 15n - 1 = (3+1)^n + 15n - 1 = A \cdot 3^2 + n \cdot 3 + 1 + 15n - 1 = 9A + 18n = 9(A + 2n) \vdots\ 9$$

Ч.т.д.

Пример 8.

Решить уравнение $(x-2)^6+(x-4)^6=64$

Решение

Осуществим замену: $x-3=y$

Тогда уравнение перепишем: $(y+1)^6+(y-1)^6=64$

Применим формулу бинома к левой части уравнения:

$$(y+1)^6+(y-1)^6=y^6+6y^5+15y^4+20y^3+15y^2+6y+1+$$

$$+y^6-6y^5+15y^4-20y^3+15y^2-6y+1=2y^6+30y^4+30y^2+2$$

В итоге $2y^6+30y^4+30y^2+2=64 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=2 \end{array}\right.$

Ответ: $x=2;\ x=4$