Задание

1. Повторить теоретический материал темы, законспектировать решение типовых задач, решить задания практической работы.

2. Фотоотчет и сообщение присылать на электронную почту

С уважением, Хвастов Александр Николаевич

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721098278 (ватсап). Электронная почта: hvastov@rambler.ru

Практическое занятие

Тема «Решение простейших тригонометрических уравнений»

Цель: научиться решать тригонометрические уравнения

План.

1.Определения тригонометрических и простейших тригонометрических уравнений.

2.Формулы общих и частных решений простейших тригонометрических уравнений.

3.Примеры применения простейших тригонометрических уравнений.

1. Тригонометрические уравнения - это уравнения, в которых неизвестная величина находится под знаком тригонометрической функции.

Простейшие тригонометрические уравнения – это уравнения вида **sin x=a**, **cos x=**a, **tg x=a**, **ctg x=a**.

2. Решение простейших тригонометрических уравнений.

Уравнение	Формулы решения	Частные случаи
$\sin x = a$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in z$ при $\lvert a \rvert \le 1$ при $\lvert a \rvert > 1$ - решений нет	$\sin x = 0$; $x = \pi n$, $n \in z$ $\sin x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in z$ $\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in z$

$\cos x = a$	$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ \ n \in z$ при $\lvert a\rvert \le 1$ при $\lvert a\rvert > 1$ - решений нет	$\cos x = 0;\quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in z$ $\cos x = 1;\quad x = 2\pi n,\ \ n \in z$ $\cos x = -1;\quad x = \pi + 2\pi n,\ n \in z$
$tgx = a$	$x = arctga + \pi n,\ n \in z$ a - любое число	$tgx = 0\quad x = \pi n,\quad n \in z$ $tgx = 1\quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\quad n \in z$ $tgx = -1\quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n\quad n \in z$
$ctgx = a$	$x = arcctga + \pi n,\quad n \in z$ a - любое число	$ctgx = 0\quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n\quad n \in z$ $ctgx = 1\quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n\quad n \in z$ $ctgx = -1\quad x = \frac{3\pi}{4} + \pi n\quad n \in z$

1) Решить уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.

$x = (-1)^k \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \pi k,\ k \in Z \Rightarrow x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$

Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$

2) Решить уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$.

$x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi k,\ k \in Z \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$.

3) Решить уравнение $tgx = \sqrt{3}$.

$x = arctg\sqrt{3} + \pi k,\ k \in Z \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

4) Решить уравнение $ctgx = \sqrt{3}$.

$x = arcctg\sqrt{3} + \pi k,\ k \in Z \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$.

5. $sin3x=1$

$3x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}, k\in\mathbb{Z}$

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}, k\in\mathbb{Z}$

6. $\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=0$

$\frac{\pi}{3}-2x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$

$-2x=-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$

$-2x=\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$

$x=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}, k\in\mathbb{Z}$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}, k\in\mathbb{Z}$

Примеры применения простейших тригонометрических уравнений.

Пример 1. Решить уравнение $\cos^2 x+\cos x-2=0$.

Решение. Это уравнение является квадратным относительно $\cos x$. Поэтому сделаем замену $\cos x=t$. В результате получим уравнение $t^2+t-2=0$. Его корни: $t_1=1,\ t_2=-2$, то есть получаем уравнение $\cos x=1$ или $\cos x=-2$. Первое уравнение дает $x=2\pi k,\ k\in Z$. Второе уравнение не имеет корней.

Ответ: $x=2\pi k,\ k\in Z$.

Пример 2. Решить уравнение $6\cos^2 x+5\sin x-7=0$.

Решение. Так как $\cos^2 x=1-\sin^2 x$, то уравнение можно представить в виде $6(1-\sin^2 x)+5\sin x-7=0$; $6\sin^2 x-5\sin x+1=0$. Сделаем замену $t=\sin x$. Получим квадратное уравнение $6t^2-5t+1=0$, решая которое, имеем:

$D = 25 - 6 \cdot 4 = 1,\ t_{1,2} = \dfrac{5 \pm 1}{12}$,то есть $t_1 = \dfrac{1}{2},\ t_2 = \dfrac{1}{3}$. Таким образом, получим два простейших уравнения $\sin x = \dfrac{1}{2}$ или $\sin x = \dfrac{1}{3}$. Решая их, имеем $x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ \ k \in Z$ или $x = (-1)^k \arcsin\dfrac{1}{3} + \pi k,\ \ k \in Z$.

Ответ: $(-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k;\ \ (-1)^k \arcsin\dfrac{1}{3} + \pi k,\ \ k \in Z$

Пример 1. Решить уравнение:

$3\sin^2 x - 2\sin x \cos x - \cos^2 x = 0$.

Решение. Это уравнение является однородным относительно $\sin x$ и $\cos x$. Поэтому, разделив его на $\cos^2 x$ $(\cos x \neq 0)$, получим $3tg^2 x - 2tgx - 1 = 0$. Введем новую переменную $tgx = t$ и решим квадратное уравнение $3t^2 - 2t - 1 = 0$

Его корни $t_1 = 1,\ t_2 = -\dfrac{1}{3}$. Получили два простейших тригонометрических уравнения $tgx = 1,\ tgx = -\dfrac{1}{3}$. Решая их, найдем: $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$ или $x = -arctg\dfrac{1}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + \pi k;\ \ -arctg\dfrac{1}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

Пример 2. Решить уравнение:

$6\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2$.

Решение. Это уравнение, сводящееся к однородному. Имеем

$$6\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x),$$

$$4\sin^2 x + \sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0,$$

то есть получили однородное уравнение. Разделив обе части уравнения на $\cos^2 x$ $(\cos x \neq 0)$, получим $4tg^2 x + tgx - 3 = 0$. Решая это уравнение, квадратное относительно tgx, найдем, что $tgx = -1$ либо $tgx = \frac{3}{4}$. Таким образом, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$ или $x = arctg\frac{3}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k,\ arctg\frac{3}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

Решите уравнение $5\sin^2 x – 8\sin x \cos x - \cos^2 x = - 2$.

Решение: Перепишем уравнение в виде

$7\sin^2 x – 8\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$.

Получили уравнение, однородное относительно sinx и cosx.

Рассмотрим два случая:

- $\cos x = 0$, тогда $7\sin^2 x – 8\sin x 0 + 0^2 =0$,

откуда $\sin x = 0$, что невозможно, поскольку $\sin^2 x + \cos^2 x =1$; в этом случае корней нет.

- $\cos x \neq 0$, тогда разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$:

$7tg^2 x – 8\, tgx + 1 =0$.

Пусть y=tgx. Получим: $7y^2-8y +1=0$, находим y_1, y_2 и делаем обратную замену.

Задания для самостоятельного решения

Решите уравнения:

1. $\sin 2x = \frac{1}{2}$
2. $2 \cos (x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$
3. $tg^2 2x – 4\, tg\, 2x + 3 = 0$
4. $\sin x - \frac{\sqrt{3}}{3} \cos x = 0$
5. $\sin^2 x – 5 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x = 0$
6. $\cos 5x – \cos x = 0$