

Уважаемые студенты!

Вам необходимо выучить теоретический материал по данной теме, рассмотреть решение примеров, ответить на контрольные вопросы.

- По вопросам обращаться 072-1098278 или hvastov@rambler.ru
- Фотоотчёт конспекта прислать в течение 3 дней со дня получения задания на hvastov@rambler.ru

Лекция

Простейшие тригонометрические уравнения

План

1. Определения тригонометрических и простейших тригонометрических уравнений.
2. Формулы общих и частных решений простейших тригонометрических уравнений.
3. Примеры применения простейших тригонометрических уравнений.

1. Тригонометрические уравнения

Тригонометрические уравнения – это уравнения, в которых неизвестная величина находится под знаком тригонометрической функции.

Простейшие тригонометрические уравнения – это уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$.

2. Решение простейших тригонометрических уравнений.

Уравнение	Формулы решения	Частные случаи
$\sin x = a$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ при $ a \leq 1$ при $ a > 1$ – решений нет	$\sin x = 0; x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$ $\sin x = 1; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ $\sin x = -1; x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$\cos x = a$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ при $ a \leq 1$ при $ a > 1$ – решений нет	$\cos x = 0; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ $\cos x = 1; x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ $\cos x = -1; x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ a – любое число	$\operatorname{tg} x = 0 x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$ $\operatorname{tg} x = 1 x = \frac{\pi}{4} + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$ $\operatorname{tg} x = -1 x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ a – любое число	$\operatorname{ctg} x = 0 x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ $\operatorname{ctg} x = 1 x = \frac{\pi}{4} + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$ $\operatorname{ctg} x = -1 x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

1) Решить уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.

$$x = (-1)^k \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

2) Решить уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$.

$$x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

3) Решить уравнение $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

$$x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

4) Решить уравнение $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$.

$$x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$5. \sin 3x = 1$$

$$3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$6. \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = 0$$

$$\frac{\pi}{3} - 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$-2x = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$-2x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Примеры применения простейших тригонометрических уравнений.

Пример 1. Решить уравнение $\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$.

Решение. Это уравнение является квадратным относительно $\cos x$. Поэтому сделаем замену $\cos x = t$. В результате получим уравнение $t^2 + t - 2 = 0$. Его корни: $t_1 = 1$, $t_2 = -2$, то есть получаем уравнение $\cos x = 1$ или $\cos x = -2$. Первое уравнение дает $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Второе уравнение не имеет корней.

$$\text{Ответ: } x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 2. Решить уравнение $6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0$.

Решение. Так как $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, то уравнение можно представить в виде $6(1 - \sin^2 x) + 5\sin x - 7 = 0$; $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$. Сделаем замену $t = \sin x$.

Получим квадратное уравнение $6t^2 - 5t + 1 = 0$, решая которое, имеем:

$$D = 25 - 6 \cdot 4 = 1, t_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{12}, \text{ то есть } t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = \frac{1}{3}. \text{ Таким образом, получим два}$$

простейших уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ или $\sin x = \frac{1}{3}$. Решая их, имеем

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z \quad \text{или} \quad x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k, k \in Z$$

Ответ: $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k; (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k, k \in Z$

Пример 1. Решить уравнение:

$$3 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 0.$$

Решение. Это уравнение является однородным относительно $\sin x$ и $\cos x$. Поэтому, разделив его на $\cos^2 x$ ($\cos x \neq 0$), получим $3 \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 1 = 0$. Введем новую переменную $\operatorname{tg} x = t$ и решим квадратное уравнение $3t^2 - 2t - 1 = 0$.

Его корни $t_1 = 1, t_2 = -\frac{1}{3}$. Получили два простейших тригонометрических уравнения $\operatorname{tg} x = 1, \operatorname{tg} x = -\frac{1}{3}$. Решая их, найдем:

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z \quad \text{или} \quad x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k, k \in Z$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k; -\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k, k \in Z$

Пример 2. Решить уравнение:

$$6 \sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2.$$

Решение. Это уравнение, сводящееся к однородному. Имеем

$$\begin{aligned} 6 \sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x &= 2(\sin^2 x + \cos^2 x), \\ 4 \sin^2 x + \sin x \cos x - 3 \cos^2 x &= 0, \end{aligned}$$

то есть получили однородное уравнение. Разделив обе части уравнения на $\cos^2 x$ ($\cos x \neq 0$), получим $4 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 3 = 0$. Решая это уравнение,

квадратное относительно $\operatorname{tg}x$, найдем, что $\operatorname{tg}x = -1$ либо $\operatorname{tg}x = \frac{3}{4}$. Таким

образом, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$ или $x = \operatorname{arctg} \frac{3}{4} + \pi k, k \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k, \operatorname{arctg} \frac{3}{4} + \pi k, k \in Z$.

Решите уравнение $5\sin^2x - 8\sin x \cos x - \cos^2x = -2$.

Решение: Перепишем уравнение в виде

$$7\sin^2x - 8\sin x \cos x + \cos^2x = 0.$$

Получили уравнение, однородное относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Рассмотрим два случая:

$\cos x = 0$, тогда $7\sin^2x - 8\sin x \cdot 0 + 0^2 = 0$, откуда $\sin x = 0$, что невозможно, поскольку $\sin^2x + \cos^2x = 1$; в этом случае корней нет.

$\cos x \neq 0$, тогда разделим обе части уравнения на \cos^2x :

$$7\operatorname{tg}^2x - 8\operatorname{tg}x + 1 = 0.$$

Пусть $y = \operatorname{tg}x$. Получим: $7y^2 - 8y + 1 = 0$, находим y_1, y_2 и делаем обратную замену.

Контрольные вопросы:

1. Какое уравнение называется тригонометрическим?
2. Дайте определения простейших тригонометрических уравнений.
3. Назовите формулы общих решений тригонометрических уравнений вида $\sin x = a, \cos x = a, \operatorname{tg} x = a, \operatorname{ctg} x = a$.