Задание

1. Записать все типовые задачи рассмотренные в лекции. Выполнить решение заданий для самостоятельного решения.

2. Фотоотчет присылать на электронную почту

С уважением, Хвастова Светлана Ивановна

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721389311 (ватсап). Электронная почта: xvsviv@rambler.ru

Тема: «Задачи на подсчет числа размещений, перестановок, сочетаний».

Цели:

- повторить формулы для нахождения числа различных видов комбинаций: размещений, перестановок, сочетаний без повторов; изучить формулы для нахождения числа различных видов комбинаций: размещений, перестановок, сочетаний с повторами, научиться распознавать задачи на нахождение размещений, перестановок, сочетаний; решить простейшие комбинаторные задачи с помощью этих формул;

- развивать познавательный интерес студентов, логическое мышление, умение применять знания в изменённой ситуации, делать выводы и обобщения; развивать умения сравнивать, систематизировать, обобщать;
- формировать научное мировоззрение у обучающихся, культуру математической речи, информационную и коммуникативную культуру студентов; воспитание дружелюбного отношения друг другу, умение работать в коллективе.

Тема сегодняшнего занятия «Задачи на подсчет числа размещений, перестановок, сочетаний.». Давайте вместе попробуем сформулировать цели урока:

- научиться распознавать задачи на нахождение размещений, перестановок, сочетаний;

- решать простейшие комбинаторные задачи с помощью этих формул.

1. Перестановка

Рассмотрим слово «КВАНТ», состоящее из 5 различных букв. Если менять порядок букв, получим 5!=120 перестановок

Если проделать то же самое со словом «АТАКА», то перестановок будет меньше, потому что, меняя местами 1,3 и 5-ю буквы, будем получать то же самое слово. Т.к. три буквы А можно менять местами 3!=6 способами, то перестановок будет в слове «АТАКА» в 6 раз меньше, т.е. $\frac{5!}{6} = 20$

<u>Вывод:</u> Перестановками в такой выборке, где есть один элемент, называются перестановками с повторениями. Обозначается : $\mathbf{P_{(n1,\ n2,\ldots,\ nk)}}$

P(n1, n2,….., nk)= $\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$, где n- количество повторений элементов

$$P_{(3)} = \frac{5!}{3!} = 20$$

<u>Задача:</u> Сколько различных перестановок можно сделать из букв слова «МАТЕМАТИКА»

<u>Решение:</u>

Всего – 10 букв

«М» - 2 повтора

«А» - 3 повтора

«Т» - 2 повтора

«Е» - 1 повтор

«И» - 1 повтор

«К»- 1 повтор

$$P_{(2,3,2,1,1,1)} = \frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{2!\cdot 3!\cdot 2!} = \frac{604800}{4} = 151200 \text{ перестановки}$$

Ответ: 151200 перестановки

2. Сочетания.

Рассмотрим следующую задачу.

В почтовом отделении продаются открытки 10 сортов. Сколькими способами можно купить 8 различных открыток?

<u>Решение.</u> Данная задача на отыскание числа сочетаний без повторений, т.к. требуется купить 8 различных открыток

$$C_{10}^{8} = C_{10}^{2} = \frac{10 * 9}{2} = 45$$

Ответ: 45 способов

Проделаем то же самое, но только определим «Сколькими способами можно купить в нем 8 открыток?

<u>Решение.</u>

Данная задача на отыскание числа сочетаний с повторениями из n = 10 элементов по k =8. Следовательно, она решается по формуле

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

$$\overline{C}_{10}^8 = C_{17}^8 = \frac{17!}{8!\cdot 9!} = 24310$$

Ответ : 24310 способов

<u>Вывод:</u> Иными словами, выборки которые отличаются количеством элементов хотя бы одного типа, называются сочетаниями с повторениями, а их общее число будем обозначать $\bar{C}_n^k$.

<u>Задача:</u> В кондитерской имеется 3 вида пирожных. Сколькими способами можно купить 9 пирожных?

Решение. В задаче требуется найти число всевозможных групп по 9 элементов, которые можно составить из данных трех различных элементов, причем указанные элементы в каждой группе могут повторяться, а сами группы отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. Это задача на отыскание числа сочетаний с повторениями из трех элементов по девять. Следовательно,

$$\bar{C}_3^9 = C_{11}^9 = C_{11}^2 = \frac{11\cdot 10}{2!} = 55.$$

1. Размещения.

Рассмотрим задачу:

В лифт восьмиэтажного дома вошли 5 пассажиров. Сколькими различными способами могут выйти пассажиры на каждом этаже, начиная со второго?

$$A_7^5 = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7!}{2!} = 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7 = 2520 \text{ способов}$$

А теперь ту же задачу, но вопрос сформулируем иначе.

В лифт восьмиэтажного дома вошли 5 пассажиров. Сколькими способами могут выйти пассажиры на каждом этаже, начиная со второго?

Задача такого вида называется «размещения с повторением», обозначается $\overline{A}_n^k$ и вычисляется по принципу умножения.

Вычисляется по следующей формуле:

$$\overline{A}_n^k = \underbrace{n\cdot n\cdot \ldots \cdot n}_{n-раз} = n^k$$

Решение. Задача сводится к распределению 5 пассажиров по 7 этажам (т. е. набор упорядоченный), причем возможны повторения (т. е. несколько пассажиров могут выйти на одном этаже). Таким образом, задача сводится к нахождению числа размещений с повторениями:

$\overline{A}_7^5 = 7^5 = 16807.$

Задача: Сколькими способами девочка Яна может разложить 12 кукол по трём ящикам, если каждый ящик может вместить все куклы?

Ответ: $\overline{A}_3^{12} = 3^{12}$

Решение типовых задач.

Задача №1. Буквы азбуки Морзе состоят из символов – точка и тире. Сколько букв получим, если потребуем, чтобы каждая буква состояла не более чем из пяти указанных символов?

Решение. Число всех букв, каждая из которых записывается одним символом, равно $\overline{A}_2^1 = 2^1 = 2$

Число всех букв, каждая из которых записывается двумя символами, равно $\overline{A}_2^2 = 2^2 = 4$.

Число всех букв, каждая из которых записывается тремя символами, равно $\overline{A}_2^3 = 2^3 = 8$.

Число всех букв, каждая из которых записывается четырьмя символами, равно $\overline{A}_2^4 = 2^4 = 16$.

Число всех букв, каждая из которых записывается пятью символами, равно $\overline{A}_2^5 = 2^5 = 32$.

Число всех указанных букв будет равно 62.

Задача №2. Сколько всего чисел (не больше 100000) можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 и 5 в каждом из которых цифры расположены в неубывающем порядке?

Решение. Это задача о числе сочетаний из пяти цифр по одному, по два, по три, по четыре и по пяти с повторениями в каждом случае. Поскольку $\overline{C}_5^1 = 5$, $\overline{C}_5^2 = 15$, $\overline{C}_5^3 = 35$, $\overline{C}_5^4 = 70$, $\overline{C}_5^5 = 126$, то существует $5 + 15 + 35 + 70 + 126 = 251$ чисел, удовлетворяющих условию задачи.

Задача №3. Экзамен состоит из 5 задач, которые можно решать в любом порядке. Сколькими способами можно расставить задачи.

Решение. $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ способов.

<u>Задача №4.</u> В магазине продается 8 различных наборов марок, посвященных спортивной тематике. Сколькими способами можно выбрать из них 3 набора.

Решение. $C_8^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{336}{6} = 56$ способа

<u>Задача №5.</u> Сколько четырехзначных чисел, в которых нет одинаковых цифр, можно составить из цифр 0, 2, 4, 6, 8.

Решение. Всего чисел A_5^4, а чисел начинающихся с нуля - A_4^3,

тогда $A_5^4 - A_4^3 = 96$.

Контрольные вопросы

1) Соединения виды перечислить?
2) На какие они делятся ? (повторения и без)
3) Важен ли порядок? В каких соединениях? (размещение)
4) Формулы нахождения: перестановок, размещения, соединения с повторениями и без.

Задачи для самостоятельного решения

Решите задачи:

1. Сколькими способами можно разместить 8 пассажиров по трем вагонам?

Ответ: $\bar{A}_3^8 = 3^8$.

2. Сколькими способами Буратино, кот Базилио и лиса Алиса могут поделить между собой 5 одинаковых золотых монет?

Ответ: $\bar{C}_3^5 = C_7^5 = C_7^2 = 21$.

3. Сколько различных браслетов можно сделать из 5 одинаковых изумрудов, 6 одинаковых рубинов и 7 одинаковых сапфиров (всего в браслет входит 18 камней)? ($P_{(5,6,7)} = \frac{18!}{5! \cdot 6! \cdot 7!}$)