Задание

1.Изучить теоретический материал темы, тезисно законспектировать с примерами решения типовых задач. Решить задачи для самостоятельного решения

2. Фотоотчет и сообщение присылать на электронную почту

С уважением, Хвастов Александр Николаевич

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721098278 (ватсап). Электронная почта: hvastov@rambler.ru

Лекция. Применение производной к исследованию функций и построению графиков.

План

1. Возрастание и убывание функции.
2. Экстремумы функции.
3. Схема исследования функции и построения её графика с помощью производной.
4. Решение задач

(Учебник: Ш.А. Алимов Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс глава IX §49, §50, §51, стр. 261-264, стр. 265-269, стр. 271-275)

1. Возрастание и убывание функции.

Производная широко используется для исследования функций, т.е. для изучения различных свойств функций. Например, с помощью производной можно находить промежутки возрастания и убывания функции, её наибольшее и наименьшее значения.

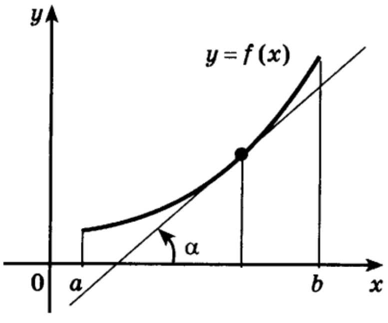


Рис. 120

Рассмотрим *применение производной к нахождению промежутков возрастания и убывания функций*.

Пусть значения производной функции $y = f(x)$ положительны на некотором промежутке, т.е. $f'(x) > 0$. Тогда угловой коэффициент касательной $tg\alpha = f'(x)$ к графику этой функции в каждой точке данного промежутка положителен. Это означает, что касательная образует острый угол с осью Ox, и поэтому график функции на этом промежутке «поднимается», т.е. функция $f(x)$ возрастает (рис.120).

Если $f'(x) < 0$ на некотором промежутке, то угловой коэффициент касательной $tg\alpha = f'(x)$ к графику функции $y = f(x)$ отрицателен.

Это означает, что касательная образует тупой угол с осью Ox, и поэтому график функции на этом промежутке «опускается», т.е. функция $f(x)$ убывает (рис. 121).

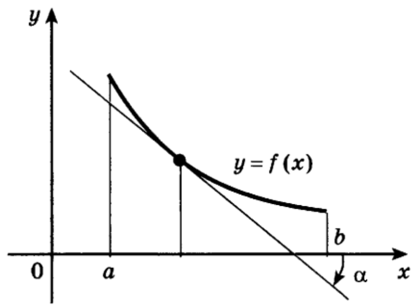


Рис. 121

Итак, если $f'(x) > 0$ на промежутке, то функция $f(x)$***возрастает*** на этом промежутке.

Если $f'(x) < 0$ на промежутке, то функция $f(x)$***убывает*** на этом промежутке.

При доказательстве теорем о достаточных условиях возрастания или убывания функции используется *теорема Лагранжа*.

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [a;b] и дифференцируема на интервале (a;b), то существует точка $c \in (a; b)$ такая, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. **(1)**

Доказательство формулы (1) приводится в курсе высшей математики. Поясним геометрический смысл этой формулы.

Проведём через точки $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$ графика функции $y = f(x)$ прямую l и назовём эту прямую секущей. Угловой коэффициент секущей равен $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Запишем формулу (1) в виде $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. **(2)**

Согласно формуле (2) угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке C с абсциссой c (рис. 122) равен угловому коэффициенту секущей l, т.е. на интервале (a;b) найдётся такая точка c, что в точке графика с абсциссой c касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна секущей. Сформулируем с помощью теоремы Лагранжа ***теорему о достаточном условии возрастания функции***.

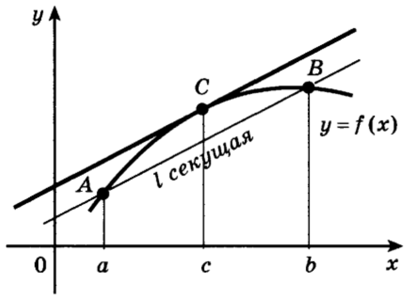


Рис. 122

Теорема 2. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a;b) и $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a; b)$, то функция возрастает на интервале (a;b).

Пример 1.

Доказать, что функция $f(x) = x + \frac{1}{x}$ возрастает на промежутке $(1; \infty)$.

<u>Доказательство:</u>

Найдём производную: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$.

Если $x > 1$, то $\frac{x^2-1}{x^2} > 0$, т. е. $f'(x) > 0$ при $x > 1$, и поэтому данная функция возрастает на промежутке $(1; \infty)$.

Промежутки возрастания и убывания функции часто называют ***промежутками монотонности этой функции.***

Правило нахождения интервалов монотонности функции $f(x)$.

1. Находят производную $f'(x)$ данной функции.

2. Находят точки, в которых $f'(x)$ равна нулю или не существует, т.е. *критические точки* функции $f(x)$.

3. Найденными точками область определения функции $f(x)$ разбивается на интервалы, на каждом из которых производная $f'(x)$ сохраняет свой знак. Эти интервалы являются интервалами монотонности (т.е. критические точки

отмечаем на числовой прямой и определяем знак производной в каждом интервале, подставив соответствующее значение xв формулу производной).

4. Исследуют знак $f'(x)$ на каждом из найденных интервалов.

Если на рассматриваемом интервале $f'(x) > 0$, то на этом интервале $f(x)$ возрастает;

если же $f'(x) < 0$, то на таком интервале $f(x)$ убывает.

Пример 2.

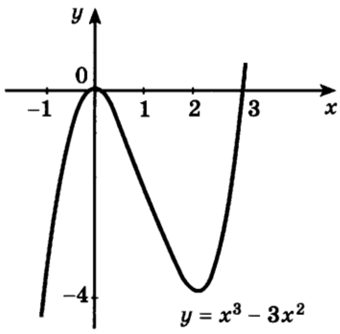


Рис. 123

Найти интервалы монотонности функции $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Решение

Найдем производную: $f'(x) = (x^3 - 3x^2)' = 3x^2 - 3 \cdot 2x = 3x^2 - 6x$.

Решая неравенство $f'(x) > 0$, т.е. неравенство $3x^2 - 6x > 0$, находим интервалы возрастания: $(-\infty; 0)$и$(2; +\infty)$.

Решая неравенство $f'(x) < 0$, т.е. неравенство $3x^2 - 6x < 0$, находим интервал убывания $(0; 2)$.

Ответ:при$x \in (-\infty; 0)$и$(2; +\infty)$ возрастает;

при$x \in (0; 2)$убывает.

График функции $y = x^3 - 3x^2$ изображен на рисунке 123. Из этого рисунка видно, что функция $y = x^3 - 3x^2$ возрастает не только на интервалах $(-\infty; 0)$и$(2; +\infty)$, но и на промежутках $(-\infty; 0]$и; убывает не только на интервале $(0; 2)$, но и на отрезке $[0; 2]$.

2. Экстремумы функции.

На рисунке 123 изображён график функции $y = x^3 - 3x^2$. Рассмотрим окрестность точки x = 0, т.е. некоторый интервал, содержащий эту точку. Как видно из рисунка, существует такая окрестность точки x = 0, что наибольшее значение функция $x^3 - 3x^2$ в этой окрестности принимает в точке x = 0. Например, на интервале (-1; 1) наибольшее значение, равное 0, функция принимает в точке x = 0. Точку x = 0 называют точкой максимума этой функции.

Аналогично точку x = 2 называют точкой минимума функции $x^3 - 3x^2$, так как функции в этой точке меньше её значения в любой точке некоторой окрестности точки x = 2, например окрестности (1,5; 2,5).

Точка x_0 ***называетсяточкой максимума функции***$f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

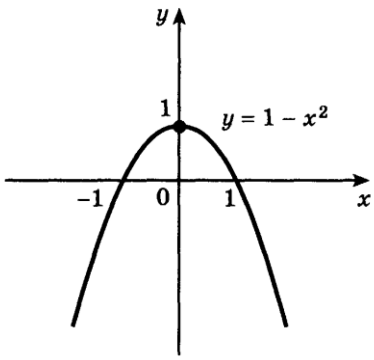


Рис. 124

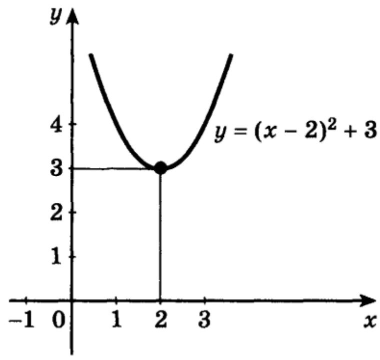


Рис. 125

Например, точка $x_0 = 0$ является точкой максимума функции $f(x) = 1 - x^2$, так как $f(0) = 1$ и при всех значения $x \neq 0$ верно неравенство $f(x) < 1$ (рис. 124).

Точка x_0 ***называетсяточкой минимума функции***$f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Например, точка $x_0 = 2$ является точкой минимума функции $f(x) = 3 + (x - 2)^2$, так как $f(2) = 3 и f(x) > 3$ при всех значениях $x \neq 2$ (рис. 125).

Точки минимума и точки максимума называются ***точками экстремума***. **Экстремум** – значение функции в этих точках.

Рассмотрим функцию $f(x)$, которая определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет производную в этой точке.

Теорема. Если x_0- точка экстремума дифференцируемой функции $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$.

Это утверждение называют теоремой Ферма.

Теорема Ферма имеет наглядный геометрический смысл: касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$, где x_0 - точка экстремума функции $y = f(x)$, параллельна оси абсцисс, и поэтому её угловой

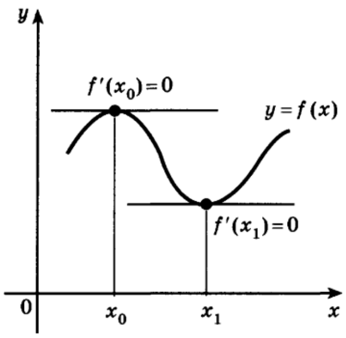


Рис. 126

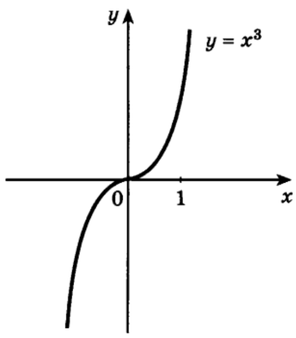


Рис. 127

коэффициент $f'(x_0)$равен нулю (рис. 126).

Например, функция $f(x) = 1 - x^2$ (рис.124) имеет в точке $x_0 = 0$ максимум, её производная $f'(x) = -2x, f'(0) = 0$. Функция $f(x) = (x - 2)^2 + 3$ имеет минимум в точке $x_0 = 2$ (рис. 125), $f'(x) = 2(x - 2), f'(2) = 0$.

Отметим, что если $f'(x) = 0$, то этого недостаточно, чтобы утверждать, что x_0 обязательно точка экстремума функции $f(x)$.

Например, если $f(x) = x^3,$то$f'(0) = 0$. Однако точка x = 0 не является точкой экстремума, так как функция x^3 возрастает на всей числовой оси (рис. 127).

Итак, точки экстремума дифференцируемой функции нужно искать только среди корней уравнения $f'(x) = 0$, но не всегда корень этого уравнения является точкой экстремума. Точки, в которых производная функции равна нулю, называют ***стационарными***.

Заметим, что функция может иметь экстремум и в точке, где эта функция не имеет производной. Например, x = 0 – точка минимума функции $f(x) = |x|$, а $f'(0)$ не существует. Точки, в которых функция имеет производную, равную нулю, или недифференцируема, называют ***критическими точками этой функции***.

Таким образом, для того чтобы точка x_0 была точкой экстремума функции $f(x)$, необходимо, чтобы эта точка была критической точкой данной функции. Приведём достаточные условия того, что стационарная точка является точкой экстремума, т.е. условия, при выполнении которых стационарная точка есть точка максимума или минимума функции.

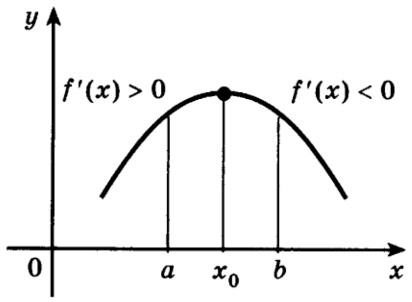


Рис. 128

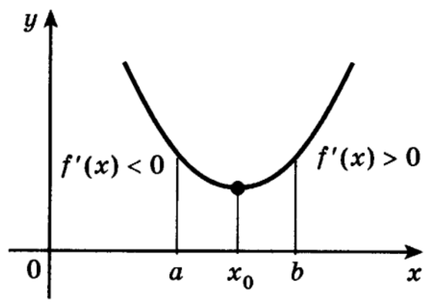


Рис. 129

Теорема. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a; b), $x_0 \in (a; b)$, и $f'(x_0) = 0$.

Тогда:

1) если при переходе через стационарную точку x_0 функции $f(x)$ её производная меняет знак с «плюса» на «минус», т.е. $f'(x) > 0$ слева от точки x_0 и $f'(x) < 0$ справа от точки x_0, то x_0 - точка максимума функции $f(x)$ (рис. 128);

2) если при переходе через стационарную точку x_0 функции $f(x)$ её производная меняет знак с «минуса» на «плюс», то x_0 - точка минимума функции $f(x)$ (рис. 129);

Если же $f'(x)$ не меняет знак в окрестности точки x_0, то данная функция не имеет экстремума в точке x_0.

Правило нахождения экстремумов функции $f(x)$.

1. Находят производную $f'(x)$ данной функции.
2. Находят все критические точки из области определения функции.
3. Устанавливают знаки производной функции при переходе через критические точки и выписывают точки экстремума.
4. Вычисляют значения функции $f(x)$ в каждой точке экстремума.

Пример 3

Найти точки экстремума функции $f(x) = x^4 - 4x^3$.

Решение

1. Найдём производную: $f'(x) = (x^4 - 4x^3)' = (x^4)' - 4(x^3)' = 4x^3 - 4 \cdot 3x^2 = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$

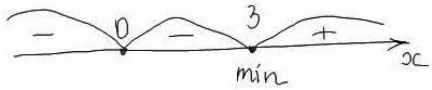
2. Найдём все критические точки из области определения функции. Решим уравнение $f'(x) = 0$. $4x^2(x - 3) = 0, 4x^2 = 0 или x - 3 = 0, x_1 = 0 или x_2 = 3$.

3. Установим знаки производной функции при переходе через критические точки и выпишем точки экстремума. Для этого отметим полученные значения на числовой прямой. Точки x_1 и x_2 разделили область определения функции $f(x) = x^4 - 4x^3$ на три интервала. Вычислим знак производной в каждом из этих интервалов:

$x = -1, -1 \in (-\infty; 0), f'(-1) = 4 \cdot (-1)^2 \cdot (-1 - 3) = -16, f'(x) < 0;$

$x = 1, 1 \in (0; 3), f'(1) = 4 \cdot (1)^2 \cdot (1 - 3) = -8, f'(x) < 0;$

$x = 4, 4 \in (3; +\infty), f'(4) = 4 \cdot (4)^2 \cdot (4 - 3) = 64, f'(x) > 0.$



Так как при переходе через точку $x_1 = 0$ знак производной не меняется, то эта точка не является точкой экстремума.

При переходе через точку $x_2 = 3$ производная меняет знак с «-» на «+». Поэтому $x_2 = 3$ - точка минимума.

Ответ: $x_2 = 3$ - точка минимума.

Пример 4

Найти точки экстремума функции $f(x) = x^3 - x$ и значения функции в этих точках.

Решение

1. Найдём производную: $f'(x) = (x^3 - x)' = 3x^2 - 1$.

2. Найдём критические точки.

$f'(x) = 0$или $f'(x)$ – не существует

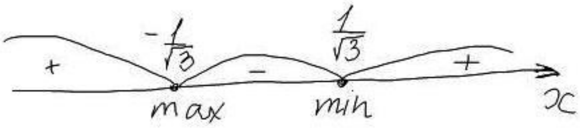
$3x^2 - 1 = 0, 3x^2 = 1, x^2 = \frac{1}{3}, x_1 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ и $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

3. Установим знаки производной функции при переходе через критические точки и выпишем точки экстремума. Для этого отметим полученные значения на числовой прямой. Точки x_1 и x_2 разделили область определения функции $f(x) = x^3 - x$ на три интервала. Вычислим знак производной в каждом из этих интервалов:

$x = -1, -1 \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 1 = 2, f'(x) > 0;$

$x = 0, 0 \in \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right), f'(0) = 3 \cdot (0)^2 - 1 = -1, f'(x) < 0;$

$x = 1, 1 \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right), f'(1) = 3 \cdot (1)^2 - 1 = 2, f'(x) > 0.$



При переходе через точку $x_1 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ производная меняет знак с «+» на «-». Поэтому $x_1 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ - точка максимума. При переходе через точку $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ производная меняет знак с «-» на «+», поэтому $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ - точка минимума.

4. Вычислим значения функции $f(x)$ в каждой точке экстремума.

Значение функции в точке максимума равно $f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, а в точке минимума
$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-2}{3\sqrt{3}}$.

Ответ: $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ - максимум, $\frac{-2}{3\sqrt{3}}$. – минимум.

3. Схема исследования функции и построения её графика с помощью производной.

Примерная схема исследования функции:

1. Найти область определения функции (если возможно, то множество значений).

2. Выяснить, не является ли функция чётной, нечётной, периодической.

3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат (если это не вызывает затруднений).

4. Найти асимптоты графика функции (если это необходимо, только для функций, которые имеют точки разрыва, т.е. не являются непрерывными).

5. Найти промежутки монотонности функции и её экстремумы.

6*. Найти промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба (применение производной второго порядка).

7. Вычислить координаты дополнительных точек (если это необходимо).

В зависимости от сложности функции некоторые пункты данной схемы могут быть пропущены.

Пример 5

Построить график функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$.

Решение

1. $D(f) = R$

2. Исследуем на чётность: $f(-x) = (-x)^3 - 2(-x)^2 + (-x) = -x^3 - 2x^2 - x = -(x^3 + 2x^2 + x) \neq -f(x)$. Функция не является ни чётной, ни нечетной, т.е. общего вида.

3. Пересечение с осью Ох: $f(x) = 0, x^3 - 2x^2 + x = 0, x(x^2 - 2x + 1) = 0, x(x-1)^2 = 0,$

$x = 0$или$x - 1 = 0, x = 1$. Таким образом, получили две точки $(0;0)$и$(1;0)$.

Пересечение с осью Оу: $x = 0, f(0) = 0$.

4. С помощью производной найдём промежутки монотонности этой функции и её точки экстремума.

Производная равна $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$. Найдем стационарные точки: $3x^2 - 4x + 1 = 0,$

откуда $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 1$.

Для определения знака производной разложим квадратный трёхчлен $3x^2 - 4x + 1$ на множители: $f'(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 1)$.

Производная положительна на промежутках $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$и$(1; +\infty)$, следовательно, на этих промежутках функция возрастает.

При $\frac{1}{3} < x < 1$ производная отрицательна, следовательно, на интервале $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ функция убывает.

Точка $x_1 = \frac{1}{3}$ является точкой максимума, так как слева от этой точки функция возрастает, а справа убывает. Значение функции в этой точке равно $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$.

Точка $x_2 = 1$ является точкой минимума, так как слева от этой точки функция убывает, а справа возрастает; её значение в точке минимума равняется $f(1) = 0$.

Результаты исследования представим в следующей таблице:

x	$x<\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}<x<1$	1	$x>1$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{4}{27}$	↘	0	↗

5. Для более точного построения графика найдём значения функции ещё в двух точках:

$f\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{-9}{8}, f(2)=2.$

Используя результаты исследования, построим график функции $\boldsymbol{f(x)=x^3-2x^2+x}$(рис. 132).

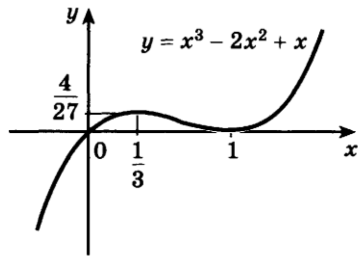
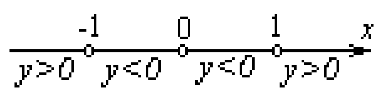
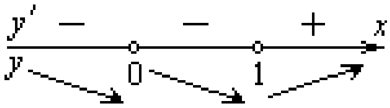
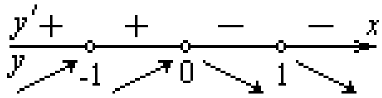
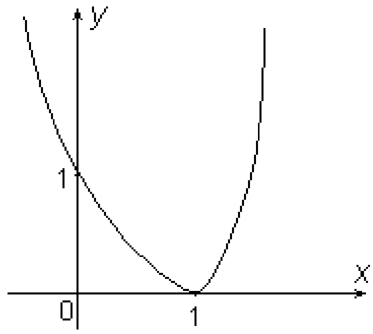
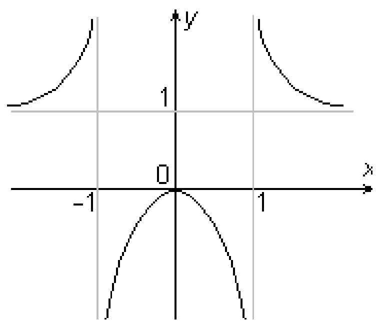


Рис. 132

Пример 6. Исследуйте и постройте графики функций:

а) $f(x)=3x^4-4x^3+1$;б)$f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$.

№ шага	План исследования Функции	Применение	плана
		а)$f(x)=3x^4-4x^3+1$	б) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$
1	Находим область определения функции	$D(f)=R$	$x^2-1=0, x=\pm1$, $D(f)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$
2	Исследуем функцию на четность, нечетность	$f(-x)=3x^4+4x^3+1\neq\pm f(x)$ ⇒функция ни четная, ни нечетная	$f(-x)=\frac{x^2}{x^2-1}=f(x)$ ⇒функция четная
3	Находим нули (корни) функции и промежутки её знакопостоянства	$3x^4-4x^3+1=0$, $(3x^4-3x^3)-(x^3-1)=0$, $(x-1)^2(3x^2+2x+1)=0$, $x-1=0, x=1$- нуль функции	$\frac{x^2}{x^2-1}=0$, $x=0$- нуль функции 

4	Находим производную функции и её критические точки	$f'(x) = (3x^4 - 4x^3 + 1)' = 12x^3 - -12x^2 = 12x^2(x-1)$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0; 1$- критические точки функции	$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)' =$ $= \frac{2x(x^2-1)-2x^3}{(x^2-1)^2} =$ $-\frac{2x}{(x^2-1)^2} f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$- критическая точка функции
5	Находим промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции	 $y'(-1) < 0, y'(0{,}5) < 0, y'(2) > 0$ x=0 – не является точкой экстремума, x=1 – точка минимума, $y_{\min} = y(1) = 0$	 $y'(-2) > 0, y'(-0{,}5) > 0,$ $y'(0{,}5) < 0, y'(2) < 0,$ x=0 – точка максимума, $y_{\max} = y(0) = 0$
6	Находим предел функции при $x \to \pm\infty$	$\lim\limits_{\Delta x \to \pm\infty} (3x^4 - 4x^3 + 1) = \infty$	$\lim\limits_{\Delta x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1$
7	Строим эскиз графика функции		

4. Задания для самостоятельного решения

Задача 1 (1 балл)

Найдите промежутки убывания и возрастания функции: $f(x) = x^3 - 3x$. В ответе укажите промежуток убывания.

Задача 2 (2 балла)

Найдите промежутки убывания и возрастания функции: $y = (x-1) \cdot e^{4x}$.

1. при $x \in (-\infty; 0{,}25)$ убывает; при $x \in (0{,}25; +\infty)$ возрастает
2. при $x \in (-\infty; 0{,}75)$ убывает; при $x \in (0{,}75; +\infty)$ возрастает
3. при $x \in (-\infty; 0{,}5)$ убывает; при $x \in (0{,}5; +\infty)$ возрастает
4. при $x \in (-0{,}51; 0{,}75)$ возрастает

В ответе укажите номер с правильным ответом.
Задача 3 (3 балла)
Найдите промежутки убывания функции $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11$.
Задача 4 (2 балла)
Найдите точку минимума функции $y = 27x^2 - 2x^3 + 1$.
Задача 5 (2 балла)
Найдите точку максимума функции $y = 36x^2 - 5x^3$.