Задание

1. Ознакомиться с теоретический материалом темы, законспектировать. Составить план к лекции.

2. Фотоотчет и сообщение присылать на электронную почту

С уважением, Хвастова Светлана Ивановна

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721389311 (ватсап). Электронная почта: xvsviv@rambler.ru

Матрица инцидентности и список рёбер. Матрица смежности графа.

Цели: *изучить математические методы задания графов, объяснить разницу между заданием ориентированного и неориентированного графа, научиться записывать матрицу инцидентности, матрицу смежности, список ребер и вершин.*

Обычно рассматриваемые графы конечны, то есть, конечны множества их элементов – вершин и рёбер. Поэтому в дальнейшем конечность графов не будет оговариваться, тем более, что важнейшие понятия и результаты, приводимые ниже относятся к произвольным графам.

Задать граф – значит, описать множества его вершин и рёбер и задать между ними отношение инцидентности. Когда граф $G(V,E)$ – конечный, для описания его вершин и рёбер достаточно их занумеровать. Пусть $v_1,\ldots,v_n$ - вершины графа, а $e_1,\ldots,e_m$ - его рёбра. Отношение инцидентности можно определить матрицей $A=\|\varepsilon_{ij}\|$ размерности $m\times n$. Столбцы этой матрицы будут соответствовать вершинам графа, а строки – его рёбрам. Если ребро e_i инцидентно вершине v_j, то $\varepsilon_{ij}=1$, в противном случае - $\varepsilon_{ij}=0$. Такая матрица называется матрицей инцидентности неориентированного графа, поскольку по способу её задания невозможно различить начало и конец каждого ребра.

<u>Пример 1.</u> Составить матрицу инцидентности неориентированного графа, изображённого на рисунке 1.

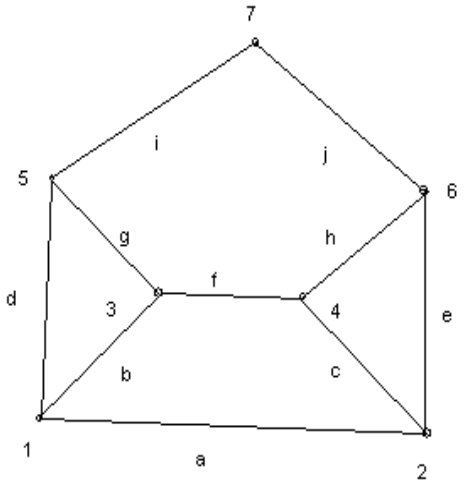

Рисунок 1

Строим матрицу инцидентности в виде таблицы:

	1	2	3	4	5	6	7
a	1	1	0	0	0	0	0
b	1	0	1	0	0	0	0
c	0	1	0	1	0	0	0
d	1	0	0	0	1	0	0
e	0	1	0	0	0	1	0
f	0	0	1	1	0	0	0
g	0	0	1	0	1	0	0
h	0	0	0	1	0	1	0
i	0	0	0	0	1	0	1
j	0	0	0	0	0	1	1

Для ориентированного графа матрица инцидентности составляется иначе. Это матрица $B = \|\varepsilon_{ij}\|$ размерности $m \times n$.

Если вершина v_j - начало ребра e_i, то $\varepsilon_{ij} = 1$. Если вершина v_j - конец ребра e_i, то $\varepsilon_{ij} = -1$. Если вершине v_j инцидентна петля e_i, то $\varepsilon_{ij} = \mu$, где $\mu -$ любое число, кроме чисел $0, \pm 1$ (обычно берут 2). В любом противном случае - $\varepsilon_{ij} = 0$

.

<u>Пример 2.</u> Построить матрицу инцидентности для графа, изображённого на рисунке 2.

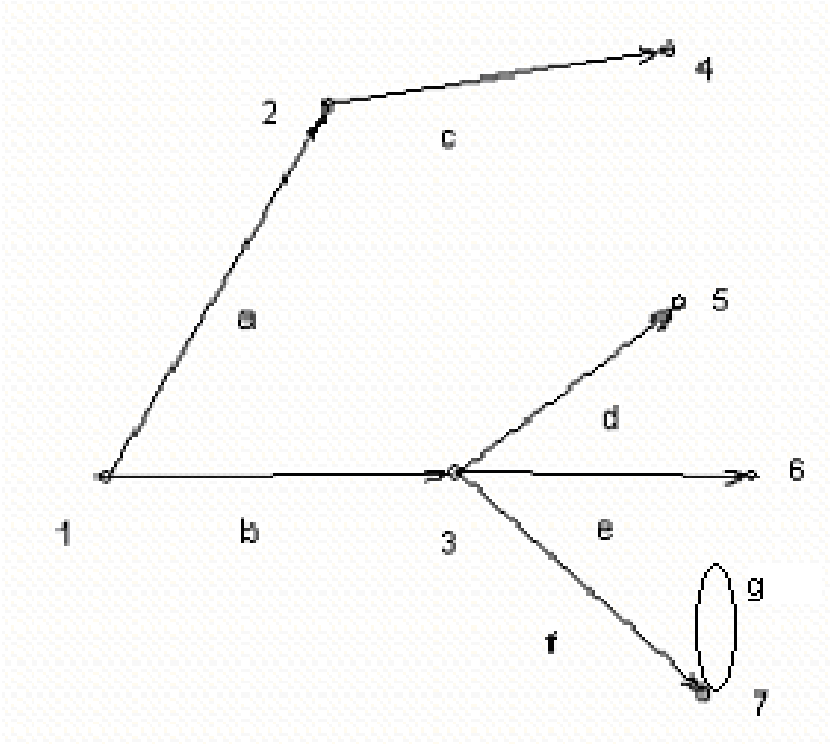

Рисунок 2

Строим матрицу инцидентности в виде таблицы:

	1	2	3	4	5	6	7
a	-1	1	0	0	0	0	0
b	-1	0	1	0	0	0	0
c	0	-1	0	1	0	0	0
d	0	0	-1	0	1	0	0
e	0	0	-1	0	0	1	0
f	0	0	-1	0	0	0	1
g	0	0	0	0	0	0	2

Ещё проще задавать граф с помощью таблицы рёбер. Она состоит из двух столбцов; в левых содержатся названия рёбер, а в правых – инцидентные им вершины (для ориентированных графов обязательно сначала указывается начало ребра, потом конец). Ниже приведены таблицы рёбер для графов из примеров 1 и 2.

Для примера 1:

Рёбра	Вершины
a	1, 2
b	1, 3
c	2, 4
d	1, 5
e	2, 6
f	3, 4
g	3, 5
g	4, 6
i	5, 7
j	6, 8

Для примера 2:

Рёбра	Вершины
a	1, 2
b	1, 3
c	2, 4
d	3, 5
e	3, 6
f	3, 7
g	7, 7

Очевидно, по списку рёбер можно построить его таблицу инцидентности. Действительно, каждая строка этого списка соответствует строке матрицы с тем же номером; аналогично можно выполнить обратную процедуру.

Ещё одним способом представления графа является построение для него матрицы смежности. Это квадратная матрица $C = \|\varepsilon_{ij}\|$, в которой количество строк и столбцов равно количеству вершин графа. Для неориентированного графа $G = (V, E)$ эта матрица определяется следующим образом. Если вершины v_i и v_j являются смежными, то есть если выполняется $(v_i, v_j) \in E$, то $\varepsilon_{ij} = 1$. В противном случае, $\varepsilon_{ij} = 0$. Для графа из примера 1 таблица смежности имеет вид:

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	0	1	0	0
2	1	0	0	1	0	1	0
3	1	0	0	1	1	0	0
4	0	1	1	0	0	1	0
5	1	0	1	0	0	0	1
6	0	1	0	1	0	0	1
7	0	0	0	0	1	1	0

Матрица смежности неориентированного графа обязательно симметрична. Размерность матрицы указывает на количество вершин, а число рёбер равно половине единиц, имеющихся в матрице.

Матрица смежности ориентированного графа отличается только тем, что $\varepsilon_{ij} = 1$ в том и только в том случае, когда в паре смежных вершин v_i и v_j вершина v_i является началом, а вершина v_j - концом ребра. Для графа из примера 2 матрица смежности выглядит следующим образом:

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	0	0	0	0
2	0	0	0	1	0	0	0
3	0	0	0	0	1	1	1
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1

Очевидно, что вся информация об ориентированном графе, порождающем некоторую матрицу смежности, содержится в верхнем (относительно главной диагонали) её треугольнике.

Ориентированный граф с симметричной матрицей смежности канонически соответствует неориентированному графу, имеющему ту же таблицу смежности (но не наоборот).