Уважаемые студенты!
Задание:

1. Повторите теорию по данной теме;.
2. Напишите конспект (кратко);
3. Решите домашнее задание.
4. Фотоотчет работы предоставить на электронную почту hvastov@rambler.ru, при возникновении вопросов обращаться по телефону 0721098278 (WatsApp).

Практическое занятие

Тема: Решение задач на тела вращения.

Цель: Систематизировать изученный материал. Решить типичные задачи по данной теме.

Цилиндр

На этом уроке мы будем решать задачи по теме «тела вращения».

Задача 1. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 48. Угол между диагональю и образующей цилиндра равен $60°$. Найти площадь поверхности и объем цилиндра (см. рис. 1).

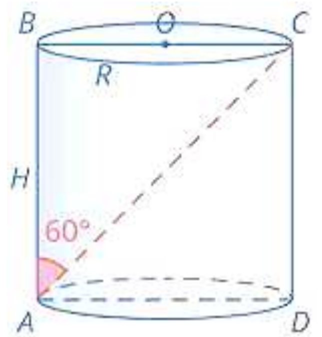

Рис. 1. Иллюстрация к задаче 1

Решение.

Осевое сечение цилиндра – это прямоугольник. Мы знаем его диагональ и угол, который она образует с одной из сторон. Найдем стороны прямоугольника:

$$AB = H = AC \cdot \cos 60° = 48 \cdot \frac{1}{2} = 24$$

$$BC = AC \cdot \sin 60° = 48 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$$

Радиус цилиндра, он же радиус основания, равен половине BC, т. е.:

$$R = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 24\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности в основании на высоту цилиндра:

$$S_{бок} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 12\sqrt{3} \cdot 24 = 576\pi\sqrt{3}$$

Площадь основания – это площадь круга:

$$S_{осн} = \pi R^2 = \pi\left(12\sqrt{3}\right)^2 = \pi \cdot 144 \cdot 3 = 432\pi$$

Найдем площадь полной поверхности как сумму боковой и двух площадей оснований:

$$S = 576\pi\sqrt{3} + 2 \cdot 432\pi = \left(576\sqrt{3} + 864\right)\pi$$

Объем цилиндра найдем как произведение площади основания на высоту:

$$V = S_{осн} \cdot H = 432\pi \cdot 24 = 10\ 398\,\pi$$

Ответ: $\left(576\sqrt{3} + 864\right)\pi;\ 10\ 398\,\pi$.

Задача 2. Один цилиндр получен вращением прямоугольника вокруг стороны a, а второй, вокруг стороны b. Найти отношение боковых поверхностей и объемов цилиндров (см. рис. 2).

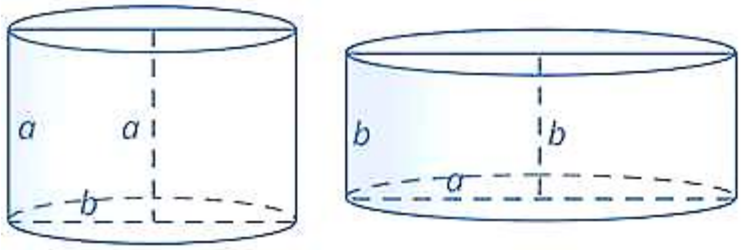

Рис. 2. Иллюстрация к задаче 2

Решение.

Высота первого цилиндра a и радиус b, высота второго b и радиус a. Найдем площади их боковых поверхностей:

$S_1 = 2\pi R_1 h_1 = 2\pi ba$

$S_2 = 2\pi R_2 h_2 = 2\pi ab$

Таким образом, их боковые поверхности равны. Их отношение:

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi ba}{2\pi ab} = 1$

Найдем их объемы:

$V_1 = \pi R_1^2 h_1 = \pi b^2 a$

$V_2 = \pi R_2^2 h_2 = \pi a^2 b$

Оказалось, объемы таких цилиндров не равны друг другу. Их отношение:

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi b^2 a}{\pi a^2 b} = \frac{b}{a}$

Ответ: $1; \frac{b}{a}$.

Конус

Решим несколько задач, в которых фигурирует конус.

Задача 3. Объем конуса равен 32. Через середину высоты конуса проведена плоскость, параллельная основанию. Найти объем усеченного конуса, отсекаемого от данного конуса проведенной плоскостью (см. рис. 3).

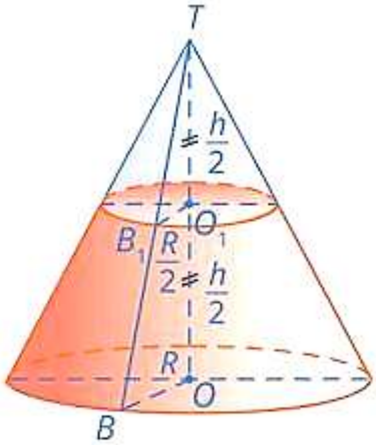

Рис. 3. Иллюстрация к задаче 3

Решение.

Проведем два рассуждения, которые оба приведут к одному результату.

1. Объем исходного конуса вычисляется по формуле:

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = 32$

У верхнего конуса высота и радиус в два раза меньше, чем у исходного:

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{8} \cdot V = \frac{32}{8} = 4$$

Тогда объем усеченного конуса равен разности объемов большого и верхнего конусов:

$$V_2 = V - V_1 = 32 - 4 = 28$$

2. Если у конусов подобны осевые сечения (треугольники), то эти конусы тоже подобны (интуитивно это понятно, но строго мы доказывать не будем). Отношение объемов подобных конусов равно кубу их коэффициента подобия k:

$$\frac{V_1}{V} = k^3$$

Т. к. высоты конусов относятся, как:

$$\frac{h_1}{h} = \frac{1}{2} = k$$

То, значит, объем верхнего конуса равен:

$$V_1 = k^3 \cdot V = \frac{32}{2^3} = 4$$

Объем усеченного конуса опять находим как их разность:

$$V_2 = V - V_1 = 32 - 4 = 28$$

Ответ: 28.

Задача 4. Высота конуса равна 10. Сечение проходит через вершину конуса и хорду основания, стягивающей дугу в $60°$. Плоскость сечения наклонена к плоскости основания под углом $45°$. Найти площадь сечения (см. рис. 4).

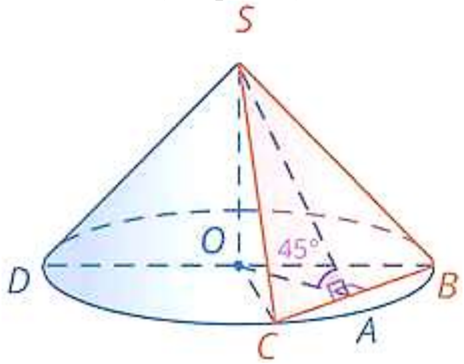

Рис. 4. Иллюстрация к задаче 4

Решение.

Т. к. плоскость сечения наклонена к основанию под углом $45°$, то $\angle OAS = 45°$ (SA перпендикулярна BC, как высота равнобедренного треугольника, OA перпендикулярна BC, как высота равнобедренного треугольника OBC, а, значит, $\angle OAS$ – линейный угол двугранного угла между плоскостями). Тогда прямоугольный треугольник SOA является равнобедренным, значит:

$$OA = SO = 10$$

Т. к. дуга CB равна $60°$, то угол $\angle COB = 60°$ (как центральный). Следовательно, треугольник COB не только равнобедренный, но и равносторонний. В равностороннем треугольнике COB мы знаем высоту. Найдем его сторону:

$$CB = OB = \frac{OA}{\sin 60^\circ} = \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

$$SA = \frac{10}{\cos 45^\circ} = \frac{10}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 10\sqrt{2}$$

Найдем площадь сечения:

$$S = \frac{1}{2}CB \cdot SA = \frac{1}{2} \cdot \frac{20\sqrt{3}}{3} \cdot 10\sqrt{2} = \frac{100\sqrt{6}}{3}$$

Ответ: $\frac{100\sqrt{6}}{3}$.

Задача 5. Отношение площадей боковой и полной поверхностей конуса равно $7:8$. Найти угол между образующей и основанием (см. рис. 5).

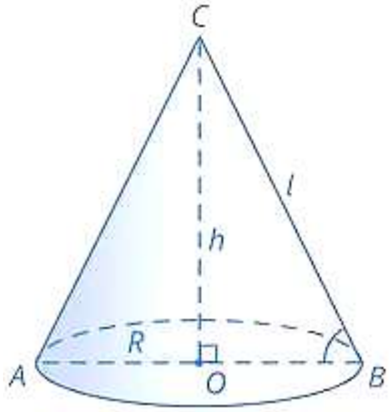

Рис. 5. Иллюстрация к задаче 5

Решение.

Запишем отношение:

$$\frac{S_{бок} + S_{осн}}{S_{бок}} = 1 + \frac{S_{осн}}{S_{бок}} = \frac{8}{7}$$

Отсюда:

$$\frac{S_{осн}}{S_{бок}} = \frac{1}{7} = \frac{\pi R^2}{\pi R l} = \frac{R}{l}$$

Но:

$$\frac{R}{l} = \cos\angle B = \frac{1}{7}$$

Тогда:

$$\angle B = \arccos\frac{1}{7}$$

Ответ: $\arccos\frac{1}{7}$.

Сфера

Рассмотрим решение задач со сферой.

Задача 6. Секущая плоскость проходит через конец диаметра сферы радиуса 2. Угол между секущей плоскостью и диаметром равен 30°. Найти длину окружности сечения (см. рис. 6).

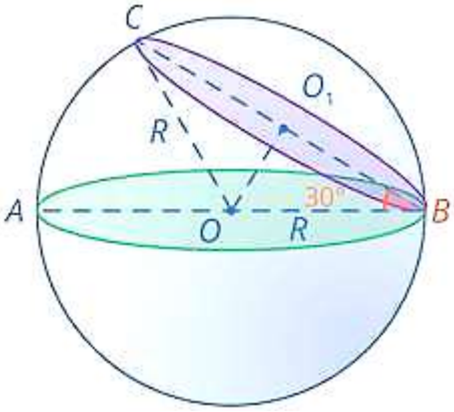

Рис. 6. Иллюстрация к задаче 6

Решение.

В сечении сферы любой плоскостью получается окружность. Так что, в самом деле, наше сечение – окружность. Рассмотрим треугольник COB. Две его стороны равны радиусу сферы, т. е. он равнобедренный. Проведем высоту OO_1. Она является медианой.

Найдем O_1B:

$$O_1B = r = R \cdot \cos\angle B = 2\cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Но O_1B – это радиус сечения. Найдем длину окружности сечения:

$C = 2\pi r = 2\sqrt{3}\pi$

Ответ: $2\sqrt{3}\pi$.

Задача 7. Доказать, что площадь полной поверхности цилиндра, полученного при вращении квадрата вокруг стороны, равна площади сферы, радиус которой равен стороне квадрата (см. рис. 7).

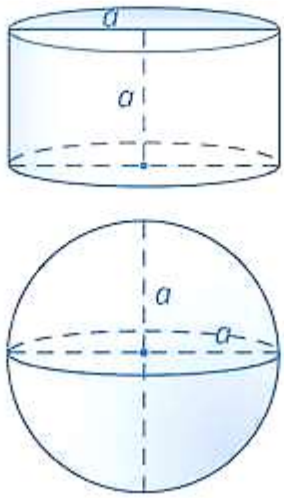

Рис. 7. Иллюстрация к задаче 7

Решение.

Найдем площадь поверхности цилиндра:

$S_{цил} = 2S_{осн} + S_{бок} = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi a^2 + 2\pi \cdot a \cdot a = 4\pi a^2$

Площадь сферы вычисляется по формуле:

$S_{сф} = 4\pi R^2$

Т. е. в нашем случае:

$S_{сф} = 4\pi a^2$

Площади в самом деле оказались равными.

Доказано.

Задача 8. Два равных шара расположены так, что центр одного находится на поверхности другого. Найти отношение объема общей части шаров к объему одного шара (см. рис. 8).

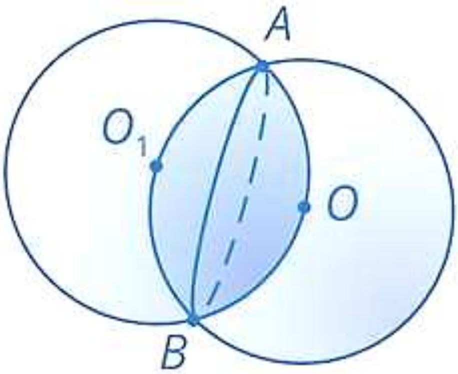

Рис. 8. Иллюстрация к задаче 8

Решение.

Изобразим сечение шаров плоскостью, проходящей через их центры (см. рис. 9). Общая часть представляет собой два шаровых сегмента.

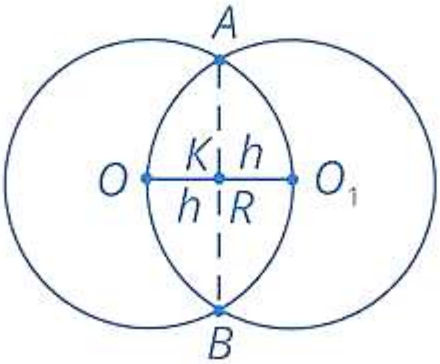

Рис. 9. Иллюстрация к задаче 8

Объем шарового сегмента вычисляется по формуле:

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h\right)$$

Высота каждого сегмента равна половине радиуса шара:

$$h = \frac{R}{2}$$

Выразим объем общей части, как объем двух таких сегментов:

$$V' = 2\pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h\right) = 2\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 (R - \frac{1}{3} \cdot \frac{R}{2}) = 2\pi \frac{R^2}{4} \cdot \frac{5R}{6} = \frac{5}{12}\pi R^3$$

Объем шара выражается формулой:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Найдем отношение объемов:

$$\frac{V'}{V} = \frac{5}{12} : \frac{4}{3} = \frac{5}{16}$$

Ответ: $\frac{5}{16}$.

Тела вращения

Рассмотрим решение более сложных задач на тела вращения.

Задача 9. Диаметр цилиндра равен 26, высота равна 21. Плоскость пересекает его основания по хордам, длины которых 24 и 10. Расстояние между этими хордами равно $\sqrt{730}$:

1. доказать, что центры оснований цилиндра лежат по разные стороны от этой плоскости;
2. найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра (см. рис. 10).

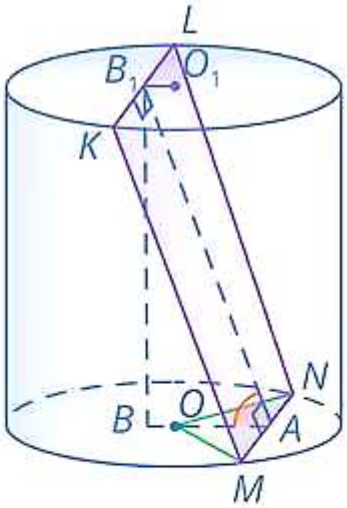

Рис. 10. Иллюстрация к задаче 9

Решение.

Начнем с первого вопроса. Если бы оба центра лежали с одной стороны от плоскости, то длина отрезка AB не превосходила бы радиуса цилиндра:

$AB < 13$

Следовательно, длина отрезка B_1A не превосходила бы величины:

$B_1A < \sqrt{13^2 + 21^2} = \sqrt{169 + 441} = \sqrt{610}$

Это противоречит условию задачи. Итак, центры лежат по разную сторону от плоскости. Перейдем ко второму вопросу – углу между плоскостью и плоскостью основания цилиндра. Искомый двугранный угол равен плоскому углу B_1AB. BA перпендикулярно хорде MN, т. к. OA перпендикулярно хорде – как высота в равнобедренном треугольнике; а B_1A перпендикулярно хорде MN, т. к. расстояние между хордами – это длина общего перпендикуляра. Тогда:

$$\sin \angle B_1AB = \frac{B_1B}{B_1A} = \frac{21}{\sqrt{730}}$$

$$\angle B_1AB = \arcsin\frac{21}{\sqrt{730}}$$

Ответ: $\arcsin\frac{21}{\sqrt{730}}$.

Задача 10. Высота цилиндра равна 3, а радиус основания равен 13:

1. построить сечение цилиндра плоскостью, проходящей параллельно оси цилиндра, так, чтобы площадь этого сечения равнялась 72.
2. найти расстояние от плоскости сечения до центра основания цилиндра (см. рис. 11).

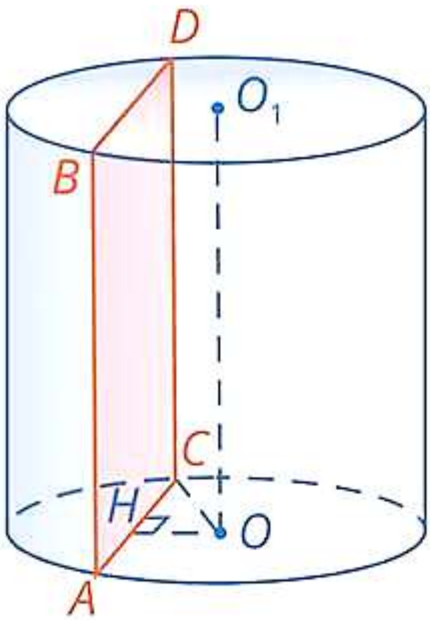

Рис. 11. Иллюстрация к задаче 10

Решение.

Понятно, что искомое сечение – прямоугольник, составленный из двух образующих цилиндра AB и CD и двух равных хорд. Найдем длину хорды:

$AB \cdot AC = 72$

$AC = \frac{72}{AB} = \frac{72}{3} = 24$

Найдем расстояние от плоскости сечения до центра нижнего основания. Это расстояние равно перпендикуляру, опущенному из точки O на плоскости сечения, т. е. отрезку OH.

Найдем его из прямоугольного треугольника COH:

$HO = \sqrt{CO^2 - CH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$

Ответ: 5.

Задача 11. В конус, радиус основания которого равен $R = 3$, вписан шар радиуса $r = 1{,}5$:

1. изобразить осевое сечение комбинации этих тел;
2. найти отношение площади полной поверхности конуса к площади поверхности шара (см. рис. 12).

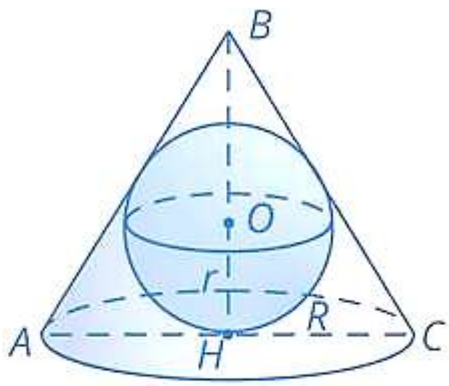

Рис. 12. Иллюстрация к задаче 11

Решение.

1. Осевым сечением является равнобедренный треугольник, боковые стороны которого являются образующими конуса, а основанием — его диаметр, и вписанная в треугольник окружность, радиус которой равен радиусу шара (см. рис. 13).

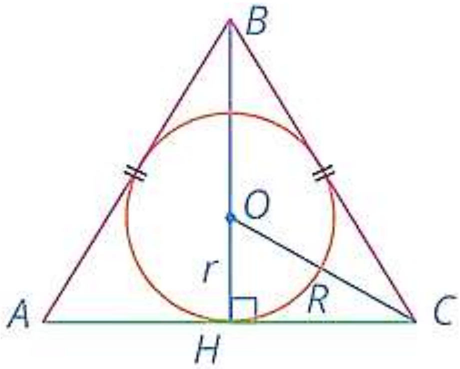

Рис. 13. Иллюстрация к задаче 11

2. Теперь перейдем к площадям. Для площади сферы нам нужен только ее радиус, и он у нас есть. Для площади полной поверхности конуса необходимо знать радиус и длину образующей. Радиус конуса мы знаем. Давайте найдем длину образующей BC.

Мы знаем два катета треугольника HCO. Найдем тангенс $\angle HCO$:

$$\operatorname{tg}\angle HCO = \frac{r}{R} = \frac{1{,}5}{3} = 0{,}5$$

Чтобы найти BC, нам хотелось бы знать тангенс $\angle HCB$. Но $\angle HCB$ в два раза больше $\angle HCO$, тангенс которого мы только что нашли:

$$\angle HCB = 2\angle HCO$$

Воспользуемся формулой тангенса двойного угла:

$$\operatorname{tg}\angle HCO = \operatorname{tg}(2\cdot\angle HCO) = \frac{2\operatorname{tg}\angle HCO}{1-\operatorname{tg}^2\angle HCO} = \frac{2\cdot 0{,}5}{1-0{,}5^2} = \frac{4}{3}$$

Найдем теперь образующую конуса. Для этого или нужен косинус $\angle HCB$ или высота конуса BH. Найдем высоту конуса:

$$BH = R\cdot\operatorname{tg}\angle HCB = 3\cdot\frac{4}{3} = 4$$

Тогда катеты треугольника BHC равны 3 и 4, это египетский треугольник, гипотенуза $BC = 5$. Найдем теперь площади и их отношение:

$$S_{\text{конус}} = \pi R^2 + \pi Rl = \pi(9+15) = 24\pi$$

$$S_{\text{сф}} = 4\pi r^2 = 9\pi$$

$$\frac{S_{\text{конус}}}{S_{\text{сф}}} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$$

Ответ: $\frac{8}{3}$.

Задача 12. На окружности основания конуса с вершиной S отмечены точки A, B и C так, что $AB = BC$. Медиана AM треугольника CAS пересекает высоту конуса:

1. точка N – середина отрезка AC. Доказать, что $\angle MNB = 90^\circ$;
2. найти угол между прямыми AM и SB, если $AS = 2$, $AC = \sqrt{6}$ (см. рис. 14).

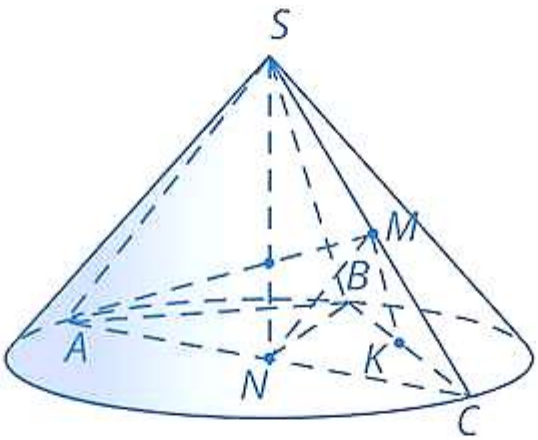

Рис. 14. Иллюстрация к задаче 12

Решение.

Т. к. медиана AM треугольника ACS пересекает высоту конуса, это значит, что высота конуса лежит в плоскости ACS. Значит, AC – диаметр основания конуса, N – центр основания и SN – высота.

1. Докажем, что $\angle MNB = 90°$, т. е. прямые BN и MN перпендикулярны.

В самом деле, прямая BN перпендикулярна плоскости ACS. Это следует из того, что отрезок BN перпендикулярен AC, как медиана равнобедренного треугольника ABC и перпендикулярен высоте SN, т. к. высота перпендикулярна любой прямой в основании.

Ну а раз отрезок BN перпендикулярен плоскости ACS, то он перпендикулярен любой прямой в этой плоскости, в том числе и MN. Высота SN перпендикулярна плоскости основания, плоскость ACS проходит через эту прямую, значит, плоскость ACS сама перпендикулярна плоскости основания.

2. Найдем угол между прямыми AM и SB. Они скрещиваются. Если в треугольнике CSB провести среднюю линию MK, то MK будет параллельна BS, а угол AMK равен искомому.

Если мы найдем все три стороны треугольника AMK, то по теореме косинусов найдем и косинус $\angle AMK$. Проще всего с MK. Т. к. $AS = 2$, а все образующие конуса равны друг другу, то $SB = 2$. Следовательно, средняя линия $MK = 1$. AM является медианой треугольника ACS, в котором мы знаем все стороны.

В планиметрии найти медиану по трем сторонам треугольника можно разными способами. Сделаем это с помощью теоремы косинусов. У треугольников ASC и ASM общий $\angle S$. Запишем два раза теорему косинусов:

$$AC^2 = AS^2 + SC^2 - 2 \cdot AS \cdot SC \cdot \cos\angle S$$

$$AM^2 = AS^2 + SM^2 - 2 \cdot AS \cdot SM \cdot \cos\angle S$$

$$AM^2 = AS^2 + \frac{SC^2}{4} - 2 \cdot AS \cdot \frac{SC}{2} \cdot \cos\angle S$$

Умножим обе части равенства на 2:

$$2AM^2 = 2AS^2 + \frac{SC^2}{2} - 2 \cdot AS \cdot SC \cdot \cos\angle S$$

Вычтем из первого равенства второе:

$$AC^2 - 2AM^2 = -AS^2 + \frac{SC^2}{2}$$

$$AM^2 = \frac{2AC^2 + 2AS^2 - SC^2}{4}$$

Мы получили один из вариантов записи теоремы Аполлония, которая выражает длину медианы через три стороны треугольника:

$$AM = \frac{\sqrt{2AC^2 + 2AS^2 - SC^2}}{2}$$

Найдем AM:

$$AM = \frac{\sqrt{2 \cdot 6 + 2 \cdot 4 - 4}}{2} = 2$$

Для поиска AK рассмотрим треугольник ABC (см. рис. 15).

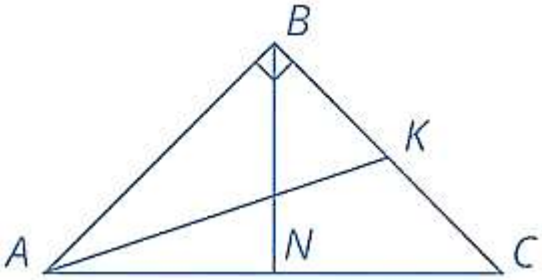

Рис. 15. Иллюстрация к задаче 12

Он прямоугольный и равнобедренный:

$$AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$$

$$BK = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$AK = \sqrt{AB^2 + BK^2} = \sqrt{3 + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

Найдем теперь по теореме косинусов косинус $\angle AMK$:

$$\cos\angle AMK = \frac{AM^2 + MK^2 - AK^2}{2 \cdot AM \cdot MK} = \frac{4 + 1 - \frac{15}{4}}{2 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5}{16}$$

Значит:

$$\angle AMK = \arccos\frac{5}{16}$$

Ответ: $\arccos\frac{5}{16}$.

Домашнее задание.

1. Площади боковой и полной поверхностей цилиндра относятся как $2:3$. Найти угол между диагоналями осевого сечения цилиндра.
2. Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 и 6, а образующая равна 5. Найти объем усеченного конуса.
3. Площадь квадрата, вписанного в сечение шара, равна 8, а расстояние от центра шара до плоскости сечения – 3. Вычислить объем шара.