Уважаемые студенты!

Вам необходимо изучить и законспектировать материал лекции, рассмотреть решение примеров.

Фотоотчет конспекта лекции предоставить на электронную почту hvastov@rambler.ru, при возникновении вопросов обращаться по телефону 0721098278 (WatsApp).

Лекция

Интегрирование тригонометрических функций.

1 тип.

Интеграл вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x\, dx$

Возможны два случая:

+1. Если хотя бы один из показателей *m* или*n*– нечетный, то соответствующая функция подводится под дифференциал и интеграл сводится к вычислению двух интегралов от степенных функций по формуле:

$$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

Пример:

Найти $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x\, dx$

Решение:

$$x \cdot d(\sin x) = \int \sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x) \cdot d(\sin x) = ¿$$

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 ¿$$

$$¿ \int (\sin^2 x - \sin^4 x) \cdot d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

$$x = 1 - ¿ \sin^2 x.$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;\ \cos^2 ¿$$

Если оба показателя *m* или *n*– нечетные, то множитель для подведения под дифференциал отделяют от меньшей из степеней.

2. Если оба показателя степени *m* или *n*– четные, интеграл находится понижением порядка (степени) в два раза с помощью следующих формул тригонометрии:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos^3 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

Пример:

Найти $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x\, dx$

Решение:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x\, dx = \int (\sin x \cdot \cos x)^2\, dx = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\, dx =$$

$$\frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)\, dx = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C.$$

2 тип.

Интегралы вида

$$\int \sin ax \cdot \cos bx\, dx$$

$$\int \sin ax \cdot \sin bx\, dx$$

$$\int \cos ax \cdot \cos bx\, dx,$$

берутся по следующим формулам тригонометрии:

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+\beta))$$

Пример:

Найти $\int \sin 3x \cdot \cos 5x\, dx$

Решение:

$$\int \sin 3x \cdot \cos 5x\,dx = \frac{1}{2}\int (\sin 8x + \sin(-2x))\,dx = \frac{1}{2}\left(\int \sin 8x\,dx - \int \sin 2x\,dx\right)$$

$$¿\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{8}\cos 8x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) + C.$$

3 тип.

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$,

где $R(\sin x, \cos x)$ – рациональная функция относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Интегралы этого вида берутся универсальной подстановкой $tg\frac{x}{2} = t$, далее используются формулы тригонометрии, выражающие $\sin x$ и $\cos x$ через $tg\frac{x}{2}$:

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$tg\frac{x}{2} = t \Rightarrow \frac{x}{2} = arctg\,t,\ тогда\ x = 2\,arctg\,t$$

$$dx = (2\,arctg\,t)'\,dt$$

$$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

Пример:

$$Найти\ \int \frac{dx}{5+4\cos x}$$

Решение:

$$\int \frac{dx}{5+4\cos x} = \left| \begin{array}{c} tg\frac{x}{2} = t \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{5+4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{5+5t^2+4-4t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{9+t^2}$$

$$¿\, 2\cdot\frac{1}{3}arctg\frac{t}{3}+C=\frac{2}{3}arctg\frac{t\frac{x}{2}}{3}+C.$$

Интегрирование некоторых видов иррациональных функций.

1 тип.

Интегралы вида

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a x^2+bx+c}}$$

берутся выделением полного квадрата под корнем и сводятся к следующим табличным:

1. $\int\frac{du}{\sqrt{u^2\pm m}}$

2. $\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$

Пример 1:

Найти $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+3}}$

Решение:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+3}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-2\cdot 3x+9)-9+3}}=\int\frac{d(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2-6}}=¿$$

$$¿\ln\left|(x-3)+\sqrt{(x-3)^2-6}\right|+C=\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+3}\right|+C.$$

Пример 2:

Найти $\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+3}}$

Решение:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+3}}=\int\frac{dx}{\sqrt{2\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x^2-2\cdot\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}\right)-\frac{1}{16}+\frac{3}{2}}}=¿$$

$$¿\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{16}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}\right|+C.$$

2 тип.

Интегралы вида

$$\int \frac{(mx+n)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

берутся выделением в числителе производной от подкоренного выражения:

$(ax^2+bx+c)'=2ax+b$, при этом исходный интеграл разобьется на сумму двух интегралов.

Первый из них

$$\int \frac{u'dx}{\sqrt{u}} = \int u^{\frac{-1}{2}} \cdot d(u) = \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{u} + C.$$

Второй интеграл относится к интегралам первого типа, рассмотренным выше.

Пример:

Найти $\int \frac{(3x-4)dx}{\sqrt{x^2-2x+7}}$

Решение:

$$\int \frac{(3x-4)dx}{\sqrt{x^2-2x+7}} = 3\int \frac{\left(x-\frac{4}{3}\right)dx}{\sqrt{x^2-2x+7}} = 3\int \frac{\frac{1}{2}(2x-2)-\frac{4}{3}+1}{\sqrt{x^2-2x+7}}dx = 3\int \frac{\frac{1}{2}(2x-2)-\frac{1}{3}}{\sqrt{x^2-2x+7}}dx = ¿$$

$$¿\frac{3}{2}\int \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+7}}dx - \frac{3}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-2\cdot 1\cdot x+1)-1+7}} = ¿$$

$$¿\frac{3}{2}\cdot 2\sqrt{x^2-2x+7} - \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+6}} = ¿3\sqrt{x^2-2x+7} - \ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+7}\right| + C.$$