Задание

1. Повторить теоретический материал, письменно ответить на контрольные вопросы, записать задачи практической работы.

2. Фотоотчет присылать на электронную почту

С уважением, Хвастова Светлана Ивановна

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721389311.

Электронная почта: xvsviv@rambler.ru

Практическая работа

«Решение задач по методу математической индукции»

Цель работы: изучить различные методы доказательств (прямое рассуждение, метод «от противного» и обратное рассуждение), иллюстрирующие методологию рассуждений. Рассмотреть метод математической индукции.

Образовательные результаты:

Студент должен

уметь:

- формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения.

знать:

- основные принципы математической логики, теории множеств и теории алгоритмов;

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Во многих разделах арифметики, алгебры, геометрии, анализа приходится доказывать истинность предложений A(n), зависящих от натуральной переменной.

Существует несколько стандартных типов доказательств, включающих следующие:

Прямое рассуждение (доказательство). Предполагаем, что высказывание A истинно и показываем справедливость B. Такой способ доказательства исключает ситуацию, когда A истинно, а B – ложно, поскольку именно в этом и только в этом случае импликация (A→B) принимает ложное значение.

Таким образом, прямое доказательство идет от рассмотрения аргументов к доказательству тезиса, т. е. истинность тезиса непосредственно обосновывается аргументами. Схема этого доказательства такая: из данных аргументов *(a, b, c, ...)* необходимо следует доказываемый тезис *q.*

По этому типу проводятся доказательства в судебной практике, в науке, в полемике, в сочинениях школьников, при изложении материала учителем и т. д.

Пример 1. На уроках химии прямое доказательство о горючести сахара может быть представлено в форме категорического силлогизма: Все углеводы - горючи. Сахар - углевод. Сахар горюч.

Обратное рассуждение (доказательство). Предполагаем, что высказывание В ложно и показываем ошибочность А. То есть, фактически, прямым способом проверяем истинность импликации ((не В)→(не А)), что согласно таблице, логически эквивалентно истинности исходного утверждения (А→В).

Метод «от противного». Этот метод часто используется в математике. Пусть а - тезис или теорема, которую надо доказать. Предполагаем от противного, что а ложно, т. е. истинно не-а (или $\bar{a}$). Из допущения $\bar{a}$ выводим следствия, которые противоречат действительности или ранее доказанным теоремам. Имеем $a \vee \bar{a}$, при этом $\bar{a}$ - ложно, значит, истинно его отрицание, т.е. $\bar{\bar{a}}$, которое по закону двузначной классической логики ($\bar{\bar{a}} \to a$) дает *a.* Значит, истинно *a*, что и требовалось доказать.

Пример 2. Теорема о том, что из точки, лежащей вне прямой, на эту прямую можно опустить лишь один перпендикуляр. Методом “от противного” доказывается и следующая теорема: “Если две прямые перпендикулярны к одной и той же плоскости, то они параллельны”. Доказательство этой теоремы прямо начинается словами: “Предположим противное, т. е. что прямые *AB* и *CD* не параллельны”.

Метод математической индукции.

В основе метода математической индукции лежит **принцип математической индукции**.

Он заключается в следующем: некоторое утверждение справедливо для всякого натурального *n*, если

1. оно справедливо для *n = 1* и Установлено, что P_1 верно. (Это утверждение называется базой индукции.)

2. из справедливости утверждения для какого-либо произвольного натурального *n = k* следует его справедливость для *n = k+1 (Для* любого n доказано, что если верно P_n, то верно P_{n+1}. (Это утверждение называется индукционным переходом).

То есть, доказательство по методу математической индукции проводится в три этапа:

1. во-первых, проверятся справедливость утверждения для любого натурального числа *n* (обычно проверку делают для *n = 1*);

2. во-вторых, предполагается справедливость утверждения при любом натуральном*n=k*;

3. в-третьих, доказывается справедливость утверждения для числа *n=k+1*, отталкиваясь от предположения второго пункта.

Тогда все утверждения нашей последовательности верны.

Пример 3. Доказать, что для всех натуральных n справедливо равенство

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Обозначим через s_n левую часть равенства, а через z_n — его правую часть.

1) Докажем сначала, что $s_1 = z_1$.

$$s_1=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{1}{6}$$

$$z_1=\frac{1\cdot(1+3)}{4\cdot(1+1)\cdot(1+2)}=\frac{1\cdot 4}{4\cdot 2\cdot 3}=\frac{1}{6}.$$

2) Дано: $s_k = z_k$. Нужно доказать: $s_{k+1} = z_{k+1}$.

$$z_k=\frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)};\ z_{k+1}=\frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)}$$

$$s_{k+1}=s_k+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}=z_k+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}=$$

$$=\frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{k(k+3)^2+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}=$$

$$=\frac{k^3+9k+6k^2+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$z_{k+1}=\frac{(k+1)^2(k+4)}{4(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{k^3+6k^2+9k+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$s_{k+1}=z_{k+1}.$$

Тем самым, утверждение доказано для любого n, поскольку из его истинности для $n=1$ следует, что оно истинно для $n=2$, из его истинности при $n=2$ следует его истинность для $n=3$ и т.д.

Контрольные вопросы:

1. В чем разница между доказательством прямым рассуждением, обратным, от противного?
2. Что означает математическая индукция? Объясните принцип математической индукции.