Задание

1. Изучить теоретический материал, кратко законспектировать.
2. Фотоотчет присылать на электронную почту

С уважением, Хвастова Светлана Ивановна

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721389311.

Электронная почта: xvsviv@rambler.ru

Лекция на тему: «Основные правила комбинаторики»

План

1. ***Основные правила комбинаторики.***
2. ***Основные правила комбинаторики с повторениями.***

1. Основные правила комбинаторики.

Существует набор задач, решение которых заключается в генерации всех элементов таких комбинаторных объектов как множество всех подмножеств, перестановки, сочетания, размещения, перестановки с повторениями, сочетания с повторениями.

Для каждого сгенерированного элемента затем проверяются какие-то свойства для конкретной задачи. Задачи, в которых требуется определить количество возможных операций, называется ***комбинаторными.*** Пусть имеется группа некоторых объектов $\grave{a}_1, a_2, a_3, ..., a_m$, которые мы будем называть ***элементами.***

Из этой группы элементов будем образовывать подгруппы. Такие подгруппы будем называть ***соединениями.***

Из этих соединений выделим классы, которые будем называть ***размещениями.***

Размещения.

Размещениями из m-элементов по n называются соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых из данных m и которые отличаются друг от друга или элементами, или их порядком.

Предполагается, что элементы водном размещении не повторяются.

Формула числа размещений без повторений.

Размещения из m по одному. Очевидно, что их число: $A_m^1 = m$

Составим размещения по 2:

$$\grave{a}_1 a_2, a_1a_3, a_1a_4, ..., a_1a_m \quad \text{-размещений (m-1)}$$

$$\text{m-строк} \begin{cases} a_2a_1, a_2a_3, a_2a_4, ..., a_2a_m \\ a_3a_1, a_3a_2, a_3a_4, ..., a_3a_m \\ ..... \\ a_ma_1, a_ma_2, a_ma_3, ..., a_ma_{m-1} \end{cases}$$

Итого: $A_m^2 = m(m-1)$

Размещения по 3: В каждой строке будет (m-2) размещений

$$A_m^2 \text{ -строк} \begin{cases} a_1a_2a_3, a_1a_2a_4, ..., a_1a_2a_m \\ a_1a_3a_2, a_1a_3a_4, ..., a_1a_3a_m \\ ..... \\ a_ma_{m-1}a_1, a_ma_{m-1}a_2, ..., a_ma_{m-1}a_{m-2} \end{cases}$$

Ясно, что $A_m^3 = A_m^2(m-2) = m(m-1)(m-2)$

$A_m^4 = m(m-1)(m-2)(m-3)$

……

$$\boldsymbol{A_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-1)) \qquad (\ *\ )}$$

Пример. В группе 21 студент. Требуется выбрать старосту, профорга и физорга. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

Каждая тройка студентов может отличаться от другой тройки или распределением обязанностей, или хотя бы одним из студентов, то есть мы должны вычислить число размещений из 21 по 3:

m=21, n=3. $A_{21}^3 = 21*20*19 = 7980$.

Другой вид формулы числа размещений.

Умножим числитель и знаменатель формулы (*) на (m-n)! Получим

$$A_m^n = \frac{m*(m-1)*(m-n+1)*(m-n)*(m-n-1).....2*1}{(m-n)*(m-n-1)....2*1}, \text{ или } A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Каждое размещение содержит одно и то же количество элементов, взятых из данных m.

Перестановки.

Размещения из n-элементов по n, каждое из которых отличается друг от друга только порядком элементов, называются ***перестановками.***

Их число обозначается P_n:

$P_n = A_n^n$ ***=n*(n-1)*(n-2)…..2*1***, то есть P_n ***=n!***

Пример: Сколькими способами могут сесть 6 человек на 6-местную лавочку?

Решение:

В данном случае каждое расположение лиц на лавочке отличается от другого расположения только порядком. Поэтому мы имеем дело с перестановками:

P_6=6!=720.

Сочетания.

Сочетания - это размещения, каждое из которых отличается от других хотя бы одним элементом.

Другими словами: ***Сочетания*** - это соединения, содержащие n элементов из данных m, отличающиеся хотя бы одним элементом.

Число сочетаний C_m^n. Если мы имеем m- элементов, и из них составим всевозможные сочетания по n и внутри каждого произведем перестановку, то получим размещения.

$C_m^n * P_n = A_m^n$ отсюда

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)!n!}$$

Пример. В группе 20 студентов. Требуется выбрать 5 делегатов на конференцию. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Так как внутри каждой пятерки делегатов перестановки дают одну и ту же пятерку, то каждая пятерка должна отличаться от других хотя бы одним делегатом. В данном случае мы должны посчитать число сочетаний из 20 по 5:

$$C_{20}^{5} = \frac{20!}{15!*5!} = 15504.$$

Свойства сочетаний.

1) $C_{m}^{n} = C_{m}^{m-n}$, достаточно выписать формулы левой и правой части равенства.

2) $C_{0}^{0} = \frac{0!}{(0-0)!0!} = 1$, т.к. по определению 0!=1

3) $C_{1}^{0} = \frac{1!}{1!*0!} = 1$, т.к. по определению 1!=1

4) $C_{n}^{k} = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}$

Доказательство:

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{(n-1)!*k + (n-1)!*(n-k)}{k!*(n-k)!} =$$

$$\frac{(n-1)!*(k+n-k)}{k!*(n-k)!} = \frac{(n-1)!*n}{k!*(n-k)!} = \frac{n!}{k!*(n-k)!} = C_{n}^{k}$$

Что и требовалось доказать.

1) $C_{n}^{k} = C_{n}^{k-1} * \frac{(n-k+1)}{k}$

Доказательство:

$\frac{C_{n}^{k}}{C_{n}^{\kappa-1}} = \frac{n!*(k-1)!(n-(k-1))!}{k!*(n-k)!*n!} = \frac{(n-k+1)}{k}$, следовательно, $C_{n}^{k} = C_{n}^{k-1} * \frac{(n-k+1)}{k}$.

Что и требовалось доказать.

2. Основные правила комбинаторики с повторениями.

Размещения с повторениями.

До сих пор мы рассматривали комбинации элементов, которые в каждой комбинации не повторялись. Рассмотрим размещения из m-элементов по n, в которых каждый элемент может повторяться. Такие размещения называются ***размещениями с повторениями:*** $\hat{A}_m^n$.

Рассмотрим задачу.

В лифт 9 этажного дома на 1-ом этаже вошло 10 человек, каждый из которых может выйти на любом этаже, начиная со второго. Сколькими способами они могут выйти из лифта?

Решение:

Каждый из пассажиров может выйти 8 способами. Два пассажира могут выйти $\hat{A}_8^2$ =8*8=8^2=64. Десять человек могут выйти $\hat{A}_8^{10}$ = 8^{10}.

Таким образом, так как каждый элемент попадает в комбинацию m способами, где n комбинаций, то

$$\hat{A}_m^n = m^n.$$

Задача о числе подмножеств данного множества.

Пусть имеется M={$\grave{a}_1, a_2, a_3, ..., a_n$}. Пустое множество Ø входит в это множество как подмножество. Одноэлементные множества тоже. Поставим каждому подмножеству кортеж длиной n, состоящий из 0 и 1.

0-если соответствующий элемент не входит в подмножество.

1-если входит.

Например, подмножеству $\{a_2, a_4\}$ будет соответствовать кортеж 010100000….0000…

Для вех подмножеств получим (0,0,0,…0), (1,0,0,…0), (0,1,0,0,...,0)… (1,1,1,…1)

Кортежей столько, сколько подмножеств. Это размещения, состоящие из двух элементов (0 и 1) и отличающиеся друг от друга либо элементами, либо их порядком. Это размещения с повторениями из двух по n: Получим

$\hat{A}_{2}^{n} = 2^{n}$.

Таким образом, мы доказали ***теорему***:

Число подмножеств n-элементного множества равно 2^{n}.

Следствие: Так как число пустых подмножеств $C_{n}^{0}(0)=1$, одноэлементных-C_{n}^{1}=n, двухэлементных-C_{n}^{2}, трехэлементных-C_{n}^{3}, n-элементных C_{n}^{n}, то сумма $\sum_{k=1}^{n} C_{n}^{k} = 2^{n}$.

Перестановки с повторениями.

Пусть мы имеем n элементов $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, P_n=***n!.*** Пусть элемент a_1 повторяется k_1 раз, элемент a_2 - k_2 раз,…., a_n - k_n раз, где $\sum_{i=1}^{n} k_i = n$. Тогда число различных перестановок будет в k_1! меньше за счет одинаковых элементов a_1, в k_2! раз меньше за счет одинаковых элементов a_2,…и в k_n! раз меньше за счет одинаковых элементов a_n. Тогда число различных перестановок будет равно:

$$P_n(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{n!}{k_1! * k_2! * \ldots * k_n!}.$$

Пример. Сколько различных перестановок можно составить из слова МОЛОТОК?

Решение:

k_1(М)=1; k_2(О)=3; k_3(Л)=1; k_5(Т)=1; k_7(К)=1; $P_7(1,3,1,1,1) = \frac{7!}{1!*3!*1!*1!*1!}$ =840.

Сочетания с повторениями.

Пример. На почте имеются открытки четырех видов: красные, желтые, зеленые и синие. Требуется 10 открыток. Сколькими способами можно их скомбинировать?

Решение:

Пусть мы отобрали 4 красных, 2 желтых, 2 зеленых и 2 синих открытки. Составим кортеж из 0 и 1. Выпишем столько единиц, сколько красная открытка встречается в нашем наборе, и поставим 0: 11110. Затем добавим кортеж для желтых -110. Получим 11110110. Добавим кортеж для зеленых и синих открыток. В последнем 0 не ставим. Получим кортеж 1111011011011. В нем 10 единиц и 3 нуля. Общая длина кортежа – 13. Таких кортежей можно составить столько, сколько перестановок с повторениями из 13.

$P_{13}(10,3)= \frac{13!}{10!*3!}$=286 – это и будет число сочетаний с повторениями из 4 по 10.

$P_{13}(10,3)= C^{10}{}_{13}$ Таким образом, $\hat{C}\,{}^{10}_{4} = C^{10}{}_{13}$.

В общем случае.

Пусть мы имеем n элементов $\grave{a}_1, a_2, a_3, ..., a_n$, из которых создаются сочетания с повторениями, и каждое сочетание содержит k элементов. Составим кортеж, который запишем вначале столько единиц, сколько элемент $\grave{a}_1$ входит в сочетание, затем запишем 0. припишем кортеж из единиц и нуль для элемента a_2 и т.д. без последнего нуля. Получим: 111…1011…10…11…1

Единиц – k. Нулей – n-1. Длина кортежа n+ k-1

Общее число сочетаний с повторениями

$\hat{C}\,{}^{k}_{n} = P_{n+k-1}(k,\text{n-}(k\text{-}1))= \frac{(n+k-1)!}{k!*(n-(k-1))!} = C^{k}{}_{n+k-1}$,

Итак, $\hat{C}\,{}^{k}_{n} = C^{k}{}_{n+k-1}$,