Задание

1. Изучить теоретический материал темы, законспектировать, подготовить 5-7 тестовых вопросов к теме.

2. Фотоотчет и сообщение присылать на электронную почту

С уважением, Хвастов Александр Николаевич

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721098278 (ватсап). Электронная почта: hvastov@rambler.ru

Лекция на тему «Определенный интеграл, его свойства и геометрический смысл. Вычисление определенного интеграла с помощью формулы Ньютона-Лейбница. Вычисление определенного интеграла методом подстановки и методом интегрирования по частям»

Содержание

1. Понятие определенного интеграла
2. Геометрический смысл определенного интеграла
3. Основные свойства определенного интеграла
4. Формула Ньютона–Лейбница
5. Замена переменной в определенном интеграле
6. Интегрирование по частям

1. Понятие определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, $a < b$. Выполним следующие операции:

1) разобьем отрезок $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$ на n частичных отрезков $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{i-1}, x_i], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$;

2) в каждом из частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ выберем произвольную точку $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и вычислим значение функции в этой точке: $f(z_i)$;

3) найдем произведения $f(z_i) \cdot \Delta x_i$, где Δx_i – длина частичного отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

4) составим сумму

$$\sigma = f(z_1)\Delta x_1 + f(z_2)\Delta x_2 + \ldots + f(z_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i, \quad (1)$$

которая называется **интегральной суммой функции y = f(x) на отрезке [a, b].** С геометрической точки зрения интегральная сумма σ представляет собой сумму площадей прямоугольников, основаниями которых являются частичные отрезки $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{i-1}, x_i], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$, а высоты равны $f(z_1)$, $f(z_2), \ldots, f(z_n)$ соответственно (рис. 1). Обозначим через λ длину наибольшего частичного отрезка $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$;

5) найдем предел интегральной суммы, когда $\lambda \to 0$.

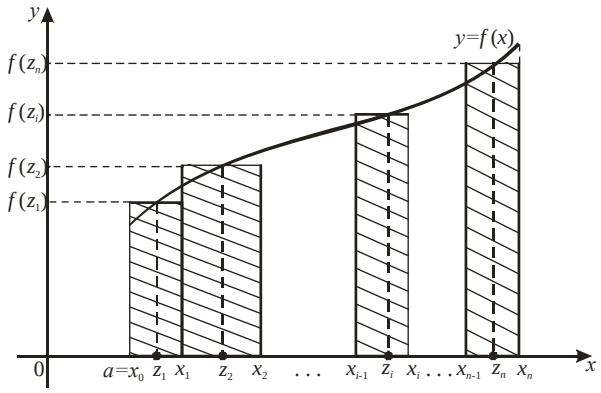

Рис. 1

Определение. Если существует конечный предел интегральной суммы (1) и он не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на частичные отрезки, ни от выбора точек z_i в них, то этот предел называется определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$.

Таким образом, $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta x_i$.

В этом случае функция $f(x)$ называется интегрируемой на $[a, b]$. Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, $f(x)$ – подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования; отрезок $[a, b]$ называется промежутком интегрирования.

Теорема 1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

2. Геометрический смысл определенного интеграла

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная неотрицательная функция $y = f(x)$. **Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная сверху графиком функции y = f(x), снизу – осью Ox, слева и справа – прямыми x = a и x = b** (рис. 2).

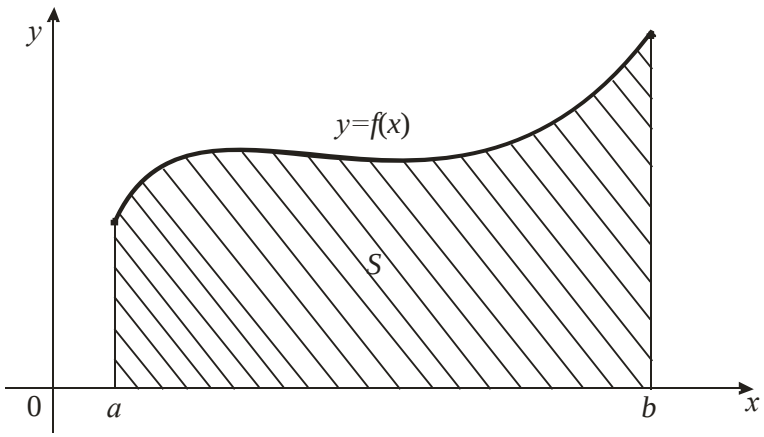

Рис. 2

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ от неотрицательной функции $y = f(x)$ с геометрической точки зрения численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, слева и справа – отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, снизу – отрезком $[a, b]$ оси Ox.

3. Основные свойства определенного интеграла

1. Значение определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования: $\int\limits_{\grave{a}}^{b} f(x)dx = \int\limits_{a}^{b} f(z)dz = \int\limits_{a}^{b} f(t)dt = \ldots$.

2. Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю: $\int\limits_{\grave{a}}^{a} f(x)dx = 0.$

3. Если $a > b$, то, по определению, полагаем $\int\limits_{\grave{a}}^{b} f(x)dx = -\int\limits_{b}^{a} f(x)dx.$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла: $\int\limits_{\grave{a}}^{b} k \cdot f(x)dx = k\int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$

5. Определенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций:

$$\int\limits_{a}^{b} (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx \pm \int\limits_{a}^{b} g(x)dx.$$

6. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $a < c < b$, то

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{a}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{b} f(x)dx.$$

7. (**теорема о среднем**). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке существует точка $\tilde{n} \in [a, b]$, такая, что $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = f(c) \cdot (b - a).$

4. Формула Ньютона–Лейбница

Вычисление определенных интегралов через предел интегральных сумм связано с большими трудностями. Поэтому существует другой метод,

основанный на тесной связи, существующей между понятиями определенного и неопределенного интегралов.

Теорема 2. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ – какая-либо ее первообразная на этом отрезке, то справедлива следующая формула:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \qquad (2)$$

которая называется **формулой Ньютона–Лейбница.** Разность $F(b) - F(a)$ принято записывать следующим образом:

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b,$$

где символ $\Big|_a^b$ называется знаком двойной подстановки.

Таким образом, формулу (2) можно записать в виде:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Нахождение определенных интегралов с помощью формулы Ньютона-Лейбница осуществляется в два этапа: на первом этапе находят некоторую первообразную $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$; на втором – находится разность $F(b) - F(a)$ значений этой первообразной на концах отрезка $[a, b]$.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_1^3 x^2 dx$.

Решение. Для подынтегральной функции $f(x) = x^2$ произвольная первообразная имеет вид $F(x) = \frac{x^3}{3} + \tilde{N}$. Так как в формуле Ньютона-Лейбница можно использовать любую первообразную, то для вычисления интеграла возьмем первообразную, имеющую наиболее простой вид: $F(x) = \frac{x^3}{3}$.

Тогда $\int_1^3 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 9 - \frac{1}{3} = 8\frac{1}{3}$.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$.

Решение. По формуле Ньютона-Лейбница имеем:

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos\, 2\, x dx = \frac{1}{2} sin\, 2\, x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}(sin\, 2 \cdot \frac{\pi}{4} - sin\, 2 \cdot 0) = \frac{1}{2}(sin \frac{\pi}{2} - sin\, 0) = \frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{1}{2}$.

5. Замена переменной в определенном интеграле

Теорема 3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда, если: 1) функция $x = \varphi(t)$ и ее производная $\varphi'(t)$ непрерывны при $t \in [\alpha, \beta]$; 2) множеством значений функции $x = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha, \beta]$ является отрезок $[a, b]$; 3) $\varphi(\alpha) = \grave{a}$, $\varphi(\beta) = b$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\phi(t)] \cdot \phi'(t)dt, \qquad (3)$$

которая называется **формулой замены переменной в определенном интеграле.**

Заметим, что как и в случае неопределенного интеграла, использование замены переменной позволяет упростить исходный интеграл, приблизив его к табличному. При этом в отличие от неопределенного интеграла в данном случае нет необходимости возвращаться к исходной переменной интегрирования – достаточно лишь найти новые пределы интегрирования α и β (для этого надо решить относительно переменной t уравнения $\varphi(t) = \grave{a}$ и $\varphi(t) = b$)).

На практике часто вместо подстановки $x = \varphi(t)$ используют подстановку $t = g(x)$. В этом случае нахождение новых пределов интегрирования по переменной t упрощается: $\alpha = g(a)$, $\beta = g(b)$.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$

Решение. Введем новую переменную по формуле $\sqrt{1+x}=t$. Определим x и dx. Возведя в квадрат обе части равенства $\sqrt{1+x}=t$, получим $1+x=t^2$, откуда $x=t^2-1$, $dx=(t^2-1)'dt=2tdt$. Находим новые пределы интегрирования. Для этого в формулу $\sqrt{1+x}=t$ подставим старые пределы $x=3$ и $x=8$. Получим: $\sqrt{1+3}=t$, откуда $t=2$ и, следовательно, $\alpha=2$; $\sqrt{1+8}=t$, откуда $t=3$ и, следовательно, $\beta=3$. Таким образом:

$$\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}=\int_2^3 \frac{(t^2-1)2tdt}{t}=2\int_2^3 (t^2-1)dt=2\int_2^3 t^2dt-2\int_2^3 dt=2\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_2^3-2t\Big|_2^3=$$

$$=\frac{2}{3}\left(3^3-2^3\right)-2(3-2)=\frac{2}{3}\cdot 19-2=\frac{32}{3}=10\frac{2}{3}.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x+3}$.

Решение. Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой. Положим $t=tg\frac{x}{2}$, откуда $x=2arctg\,t$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$. Найдем новые пределы интегрирования: если $x=0$, то $t=tg0=0$; если $x=\frac{\pi}{2}$, то $t=tg\frac{\pi}{2}=1$. Значит, $\alpha=0$, $\beta=1$. Следовательно:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x+3}=\int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2\frac{1-t^2}{1+t^2}+3}=\int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2(1-t^2)+3(1+t^2)}{1+t^2}}=\int_0^1 \frac{2dt}{2-2t^2+3+3t^2}=$$

$$=2\int_0^1 \frac{dt}{t^2+5}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{t}{\sqrt{5}}\Big|_0^1=\frac{2}{\sqrt{5}}\left(arctg\frac{1}{\sqrt{5}}-arctg\frac{0}{\sqrt{5}}\right)=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{5}}\left(arctg\frac{1}{\sqrt{5}}-arctg0\right)=\frac{2}{\sqrt{5}}arctg\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int_1^2 x\left(3-x^2\right)^5 dx$.

Решение. Положим $t = 3 - x^2$, тогда $dt = (3 - x^2)'dx = -2xdx$, откуда $xdx = -\frac{1}{2}dt$. Находим новые пределы интегрирования: $x = 1 \to t = 3 - 1^2 = 2$; $x = 2 \to t = 3 - 2^2 = -1$. Имеем: $\alpha = 2,\ \beta = -1$. Следовательно:

$$\int_1^2 x\left(3 - x^2\right)^5 dx = \int_2^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)t^5 dt = -\frac{1}{2}\int_2^{-1} t^5 dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} t^5 dt = \frac{1}{2}\cdot\left.\frac{t^6}{6}\right|_{-1}^{2} = \left.\frac{1}{12}t^6\right|_{-1}^{2} =$$

$$= \frac{1}{12}\left(2^6 - (-1)^6\right) = \frac{1}{12}\cdot 63 = \frac{63}{12} = 5\frac{1}{4}.$$

6. Интегрирование по частям

Теорема 4. Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$. Тогда имеет место следующая формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu. \quad (4)$$

Доказательство

Так как $(uv)' = u'v + uv'$, то функция uv является первообразной для функции $u'v + uv'$. Тогда по формуле Ньютона–Лейбница получаем

$$uv\Big|_a^b = \int_a^b (u'v + uv')dx = \int_a^b u'vdx + \int_a^b uv'dx = \int_a^b vdu + \int_a^b udv,$$

откуда

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Пример 6. Вычислить $\int_1^e \ln xdx$.

Решение. Положим $u = \ln x,\ dv = dx$, отсюда $du = \frac{1}{x}dx,\ v = x$. По формуле (4) находим

$$\int_1^e \ln x dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx = x\ln x\Big|_1^e - x\Big|_1^e =$$

$$= e\ln e - 1\cdot\ln 1 - (e-1) = e - 0 - e + 1 = 1.$$

Пример 7. Вычислить $\int_0^\pi x\cos x dx$.

Решение. Пусть $u = x,\ dv = \cos x\, dx,$ тогда $du = dx,\ v = \sin x$. Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int_0^\pi x\cos x dx = x\sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx = x\sin x\Big|_0^\pi - (-\cos x)\Big|_0^\pi = x\sin x\Big|_0^\pi + \cos x\Big|_0^\pi =$$

$$= \pi\sin\pi - 0\cdot\sin 0 + \cos\pi - \cos 0 = 0 - 0 - 1 - 1 = -2.$$

Пример 8. Вычислить $\int_0^1 (x^2-1)e^x dx$.

Решение. Полагая $u = x^2 - 1,\ dv = e^x dx$, определяем $du = 2xdx,\ v = e^x$. Следовательно:

$$\int_0^1 (x^2-1)e^x dx = (x^2-1)\cdot e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\cdot 2xdx = (x^2-1)\cdot e^x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 xe^x dx =$$

$= (1^2-1)\cdot e^1 - (0^2-1)\cdot e^0 - 2\int_0^1 xe^x dx = 1 - 2\int_0^1 xe^x dx =$ [к полученному интегралу снова применяем формулу интегрирования по частям: $u = x,\ dv = e^x dx$; следовательно: $du = dx,\quad v = e^x$] $= 1 - 2\left(xe^x|_0^1 - \int_0^1 e^x dx\right)$ $= 1 - 2(1\cdot e^1 - 0\cdot e^0 - \int_0^1 e^x dx\Big) = 1 - 2(e - e^x|_0^1) = 1 - 2(e - (e^1 - e^0)) =$ $1 - 2(e - e + 1) = 1 - 2 = -1.$