Уважаемые студенты!
Задание:

1. Ознакомиться с теоретическим материалом темы, законспектировать, решить задачи в конце лекции.
2. Фотоотчет и сообщение присылать на электронную почту hvastov@rambler.ru

С уважением, Хвастова Александр Николаевич

Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721098278 (ватсап).

Тема: Интегрирование рациональных дробей

Цель: Изучить новый материал, научиться интегрировать рациональные выражения.

Определение 1. Дробно-рациональной функцией или **рациональной дробью** называется частное двух многочленов $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, где $Q_m(x) = g_0 + g_1 x +$ и $+ \ldots + g_m x^m$, $P_n(x) = p_0 + p_1 x + \ldots + p_n x^n$ – многочлены степени m и n, причем $n \neq 0$.

Определение 2. Рациональная дробь $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ называется **правильной**, если высший показатель степени числителя m меньше соответствующей степени n знаменателя $(m < n)$.

Определение 3. Дробь называется **неправильной**, если $m > n$.

Любую неправильную рациональную дробь $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ можно, разделив числитель на знаменатель, изобразить в виде суммы многочлена $L_{m-n}(x)$ и правильной рациональной дроби $\frac{R(x)}{P_n(x)}$:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = L_{m-n}(x) + \frac{R(x)}{P_n(x)}. \quad (1)$$

Пример 1. $\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2}$ – неправильная рациональная дробь. Разделим числитель на знаменатель столбиком:

$$\begin{array}{l|l}
x^4 \qquad\qquad -5x+9 & x-2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4 - 2x^3} & x^3 + 2x^2 + 4x + 3 \\
\quad 2x^3 \qquad -5x+9 & \\
\quad \underline{2x^3 - 4x^2} & \\
\qquad 4x^2 - 5x + 9 & \\
\qquad \underline{4x^2 - 8x} & \\
\qquad\quad 3x + 9 & \\
\qquad\quad \underline{3x - 6} & \\
\qquad\qquad 15. &
\end{array}$$

Имеем:

$$\frac{x^4-5x+9}{x-2}=x^3+2x^2+4x+3+\frac{15}{x-2}.$$

Поскольку интегрирование целой части $L(x)$ довольно простое, достаточно научиться интегрировать **правильные** дроби.

Интегрирование правильных рациональных дробей

Определение 4. Дроби вида

I. $\dfrac{A}{x-a}$;

II. $\dfrac{A}{(x-a)^m}$, где $m>1$, целое;

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, где $\dfrac{p^2}{4}-q<0$

(трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней);

IV. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, где $n\geq 2$, целое, $\dfrac{p^2}{4}-q<0$

(трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней);

где $A,\ B,\ p,\ q,\ a$ – действительные числа, $n=2,3,\ldots$, называются **простейшими (элементарными) рациональными дробями I, II, III и IV типа.**

Дальше будет показано, что любую рациональную дробь можно представить в виде суммы простейших дробей.

Интегралы от простейших рациональных дробей **I** и **II** типов находят методом непосредственного интегрирования:

I. $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx=A\cdot\ln|x-a|+C$; (2)

II. $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^m}dx=A\int(x-a)^{-m}dx=A\frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1}+C=\frac{A}{(1-m)(x-a)^{m-1}}+C.$ (3)

Пример 2. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{x+5}$.

Решение. $\displaystyle\int\frac{dx}{x+5}=\int\frac{d(x+5)}{x+5}=\ln|x+5|+C$.

Пример 3. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+5)^3}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{(x+5)^3}=\int(x+5)^{-3}d(x+5)=\frac{(x+5)^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{2(x+5)^2}+C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx$.

Решение.

$$\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)-1+6}{x^2-4x+8}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx + 5\int \frac{dx}{x^2-4x+8} = \frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8) + 5\int \frac{dx}{(x-2)^2+2^2} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8) + \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2} + C.$$

Интегрирование рациональной дроби $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ сводится к интегрированию простых дробей с помощью следующей важной теоремы алгебры.

Теорема 1. Каждая правильная дробь $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, $(m < n)$ может быть представлена в виде суммы конечного числа простых дробей.

Возможны следующие случаи:

1) корни знаменателя действительные и разные, т.е.

$$P_n(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n).$$

В этом случае дробь $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ раскладывается в сумму простейших дробей **I** типа (метод неопределенных коэффициентов):

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-a_n} \qquad (4)$$

A_1, A_2, A_n находятся с тождества (4).

2) корни знаменателя действительные, причем некоторые из них кратные, т.е. $P_n(x) = (x-a)(x-b)^k$.

В этом случае дробь $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ раскладывается в сумму простейших дробей **I** и **II** типа:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_k}{(x-b)^k}. \qquad (5)$$

Коэффициенты A, B, B_k находятся с тождества (5).

3) корни знаменателя действительные, причем некоторые из них кратные, кроме того знаменатель содержит квадратный трехчлен, не имеющий действительных корней.

В этом случае дробь $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ раскладывается в сумму простейших дробей **I, II, III** типов:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_k}{(x-b)^k} + \frac{Dx+E}{x^2+px+q}, \qquad (6)$$

где коэффициенты A, B_1, B_2, B_k, D, E находятся с тождества (6).

Пример 5. Найти $\int \frac{x+8}{x^2+4x+4}dx$.

Решение. Уравнение $x^2+4x+4=0$ имеет кратный корень $x=-2$, поэтому

$$x^2+4x+4=(x+2)^2 \text{ и } \frac{x+8}{x^2+4x+4} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2}$$

Сведя правую часть последнего равенства к общему знаменателю, получим $x+8=A(x+2)+B$. Тогда

$$\begin{cases} A=1; \\ 2A+B=8. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1; \\ B=6. \end{cases}$$

Итак,

$$\frac{x+8}{x^2+4x+4} = \frac{1}{x+2} + \frac{6}{(x+2)^2}.$$

Поэтому

$$\int \frac{(x+8)dx}{x^2+4x+4} = \int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{6dx}{(x+2)^2} = \ln|x+2| - \frac{6}{x+2} + C.$$

Пример 6. Найти $\int \frac{2x^2+2x+2}{(x-2)(x^2+1)}dx$.

Решение. Разложим подинтегральную дробь на простые дроби:

$$\frac{2x^2+2x+2}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Mx+N}{x^2+1}.$$

Получим

$$2x^2+2x+2 = A(x^2+1)+(Mx+N)(x-2) =$$
$$= x^2(A+M)+x(-2M+N)+(A-2N).$$

$$\begin{cases} A+M=2; \\ -2M+N=2; \\ A-2N=2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2-M; \\ N=2+2M; \\ M+2N=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M=-\frac{4}{5}; \\ N=\frac{2}{5}; \\ A=2-\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{14}{5}. \end{cases}$$

Тогда

$$\int \frac{2x^2+2x+2}{(x-2)(x^2+1)}dx = \frac{14}{5}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{5}\int \frac{-4x+2}{x^2+1}dx =$$
$$= \frac{14}{5}\ln|x-2| - \frac{2}{5}\ln(x^2+1) + \frac{2}{5}\operatorname{arctg} x + C.$$

Пример 7. Найти интеграл $\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx$.

Решение. Выделим целую часть данной неправильной рациональной дроби, разделив числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{l|l} x^3+3x^2+5x+7 & x^2+2 \\ \hline -\underline{x^3 \qquad\quad +2x} & x+3+\dfrac{3x+1}{x^2+2} \\ \quad -\underline{3x^2+3x+7} & \\ \qquad\quad \underline{3x^2 \qquad +6} & \\ \qquad\qquad 3x+1 & \end{array}.$$

Итак,

$$\frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}=x+3+\frac{3x+1}{x^2+2}.$$

Отсюда находим

$$\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx=\int\left(x+3+\frac{3x+1}{x^2+2}\right)dx=$$

$$=\int x\,dx+3\int dx+\int\frac{3x+1}{x^2+2}dx=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{3}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+2}+\int\frac{dx}{x^2+2}=$$

$$=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{3}{2}\ln(x^2+2)+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

Пример 8. Вычислить интеграл:

$$\int\frac{2x^2-3x+7}{(x+3)(x+1)x}dx=$$

$$\left[\begin{array}{lll} \dfrac{2x^2-3x+7}{(x+3)(x+1)x}= & \dfrac{A}{x+3}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{x}= & \dfrac{A(x+1)x+B(x+3)x+C(x+3)(x+1)}{(x+3)(x+1)x} \\ & & \\ x=-3, & 34=6A, & A=\dfrac{34}{6}=\dfrac{17}{3}; \\ x=-1, & 12=-2B, & B=-6; \\ x=0, & 7=3C, & C=\dfrac{7}{3}. \end{array}\right]$$

$$=\int\frac{17}{3(x+3)}dx+\int\frac{6}{x+1}dx+\int\frac{7}{3}\cdot\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{17}{3}\ln|x+3|-6\ln|x+1|+\frac{7}{3}\ln|x|+C.$$

Задания для самостоятельного решения к лекции (в квадратных скобках указаны ответы для самопроверки)

1. $\int \frac{dx}{(2x+3)^3}$ $\left[-\frac{1}{4(2x+3)^2}+C\right]$

2. $\int \frac{dx}{x^2-6x+18}$ $\left[\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{3}+C\right]$

3. $\int \frac{2x+5}{x^2+2x+2}\,dx$ $\left[\ln(x^2+2x+2)+3\operatorname{arctg}(x+1)+C\right]$

4. $\int \frac{3x+2}{x^2+2x+5}\,dx$ $\left[\frac{3}{2}\ln(x^2+2x+5)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C\right]$

5. $\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2}\,dx$ $\left[\frac{x^2}{2}+3x-\frac{7}{x}+5\ln x+C\right]$

6. $\int \frac{x^3+2x^2+3x+1}{x^2+1}\,dx$ $\left[\frac{x^2}{2}+2x+\ln(x^2+1)-\operatorname{arctg}x+C\right]$

Контрольные вопросы:

1. Какое выражение называется рациональной дробью? Какие виды рациональных дробей вы знаете?
2. Как выделить целую часть рациональной дроби?
3. В чем заключается суть метода неопределенных коэффициентов?