Задание

1. Изучить и законспектировать материал лекции. Лекция рассчитана на 4 часа. Обязательно записать примеры решения типовых задач по теме.

2. Фотоотчет присылать на электронную почту

С уважением, Хвастова Светлана Ивановна

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721389311 (ватсап). Электронная почта: xvsviv@rambler.ru

Числовые характеристики дискретной случайной величины.

1. Случайная величина (поавторение)

В практике встречаются события, состоящие в появлении того или иного числа. Например, при бросании игральной кости могли появиться числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Наперед определить число выпавших очков невозможно, поскольку оно зависит от многих случайных причин, которые не могут быть учтены. В этом смысле число очков есть величина случайная; числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 есть *возможные значения* этой величины.

Случайной называют переменную величину, которая в зависимости от исходов испытания принимает значения, зависящие от случая.

Обозначают случайные величины прописными буквами X, Y, Z, а их возможные значения – соответствующими строчными буквами x, y, z. Например, если случайная величина X имеет три возможных значения, то они будут обозначены так: x_1, x_2, x_3.

2. Дискретные и непрерывные случайные величины

Случайная величина, принимающая различные значения, которые можно записать в виде конечной или бесконечной последовательности, называется *дискретной случайной величиной.*

Например, в рассмотренном ранее примере числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 образуют конечную последовательность чисел, а значит, случайная величина является дискретной (прерывной).

Случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого промежутка, называется *непрерывной случайной величиной.* Настоящее определение непрерывной случайной величины будет дано в дальнейшем.

Пример, Расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия, есть случайная величина. Действительно, расстояние зависит не только от установки прицела, но и от многих других причин, которые не могут быть полностью учтены. Возможные значения этой величины принадлежат некоторому промежутку (a, b).

3. ***Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины***

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями; его можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения, а вторая - их вероятности:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Приняв во внимание, что в одном испытании случайная величина принимает одно и только одно возможное значение, заключаем, что события $X = x_1$, $X = x_2$, ..., $X = x_n$ образуют полную группу; следовательно, сумма вероятностей этих событий, т.е. сумма вероятностей второй строки таблицы, равна единице: $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$

Если множество возможных значений X бесконечно, то ряд $p_1 + p_2 + ...$ и его сумма равна единице.

<u>Пример 1</u>. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50 рублей и 10 выигрышей по 1 руб. Найти закон распределения случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

Решение. Напишем возможные значения X: $x_1 = 50, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0.$ Вероятности этих возможных значений таковы: $p_1 = 0{,}01, \quad p_2 = 0{,}1, \quad p_3 = 1 - (p_1 + p_2) = 0{,}89$

Напишем закон распределения:

X	50	10	0
P	0,01	0,1	0,89

Контроль: 0,01+0,1+0,89=1

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить и графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки (x_i, p_i), а затем соединяют их отрезками прямых. Полученную фигуру называют *многоугольником распределения.*

Пример 2. Монета брошена 2 раза. Написать в виде таблицы закон распределения случайной величины X – числа выпадений «герба».

Решение. Вероятность появления «герба» в каждом бросании монеты $p = \frac{1}{2}$, следовательно, вероятность не появления герба. При двух бросаниях монеты «герб» может появиться либо два раза, либо 1 раз, либо совсем не появиться. Т. о. возможные значения X таковы: $x_1 = 2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0$. Найдем вероятности этих возможных значений по формуле Бернулли:

$$P_2(2) = C_2^2 p^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}25$$

$$P_2(1) = C_2^1 pq = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$P_2(0) = C_2^0 q^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}25$$

Запишем закон распределения:

X	2	1	0
P	0,25	0,5	0,25

Контроль: 0,25+0,5+0,25=1

4. Числовые характеристики ДСВ

В повседневной жизни часто используется среднее значение СВ, например, на выполнение работы потребуется в среднем два часа, на концерте

присутствовало около трехсот человек, обычно очередь в кассу в соседнем магазине составляет пять- шесть человек. Как охарактеризовать случайную величину не рядом чисел, а одним – двумя числовыми значениями?

Для описания ДСВ иногда удобнее пользоваться не законом распределения, а числовыми характеристиками: модой, медианой, математическим ожиданием, дисперсией и среднеквадратическим отклонением.

Модой ДСВ (Mo(X)) называется такое значение ДСВ, вероятность которого наибольшая.

Значение СВ, вероятность которого минимальная, называется *антимодой (только из пространства реальных событий).* Ряд распределения может не иметь моды (всевозможные значения имеют одну и ту же вероятность, например, выпадение грани при подбрасывании одного кубика.)

Определите моду и антимоду в примере 1: мода 0, антимода 50. Моду как характеристику ДСВ часто используют в социологических исследованиях, например, при определении рейтинга популярности того или иного политического деятеля или певца. При этом в качестве ДСВ выступает число голосов отданных, за в социологическом опросе.

Медианой ДСВ – Me(X) называется среднее по положению значение ДСВ.

В ряду с нечетным количеством членов медиана есть значение на среднем месте ДСВ

Номер места n вычисляется по формуле $n = \frac{N+1}{2}$, где N – количество элементов в ряду распределений.

В ряду с четным количеством членов медианой являются два значения с номерами

$n - 0{,}5$ и $n + 0{,}5$. среднее арифметическое значений ДСВ, стоящих на этих местах и есть медиана.

Пример 3. Учет производительности труда станочников цеха за смену задан рядом распределений:

Номер по списку	1	2	3	4	5	6	7	8
Производительность дет./смену	2	2	3	4	6	7	7	7

Найти моду и медиану ДСВ X.

Решение. Mo(X)=57.

Т.к. N=8, то $n = \frac{N+1}{2} = 4{,}5$, $n - 0{,}5 = 4$; и $n + 0{,}5 = 5$

Среднее арифметическое значений ДСВ на 4 и 5 местах $\frac{54+56}{2} = 55$, Me(X)=55.

Медиана характеризует не только количественную, но и качественную сторону некоторого события. Например, средний капитал фирмы может определять и стабильность, и надежность.

Одна из самых важных характеристик ДСВ – математическое ожидание.

Математическим ожиданием ДСВ – M(X) называется сумма произведений значений случайной величины на их вероятности.

Если ДСВ задана законом распределения с конечным числом элементов:

X_i	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_{n-1}	p_n

то математическое ожидание ***M(X)*** находится по формуле

$$M(X)=\boldsymbol{x_1}p_1 + \boldsymbol{x_2}p_2 + \cdots + \boldsymbol{x_n}p_n$$

Пример 4. Из 100 лотерейных билетов в 30 выигрыш составляет100 тыс. р., в 10 – 200 тыс. р., в 5 – 300 тыс.р., в 1 – 1 млн.р. Найти числовые характеристики выигрыша.

Решение. Случайная величина X – выигрыш – принимает значения $x_1 = 0$, $x_2 = 100$ тыс. р, $x_3 = 200$ тыс. р, $x_4 = 300$ тыс. р, $x_5 = 1$ млн. р

Вероятность того, что СВ X принимает соответственно значения:

$$p_1 = \frac{54}{100} = 0{,}54;\ p_2 = \frac{30}{100} = 0{,}3;\ p_3 = \frac{10}{100} = 0{,}1;\ p_4 = \frac{5}{100} = 0{,}05;\ p_5 = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

Закон распределения ДСВ имеет вид:

X_i		100 тыс.	200 тыс.	300 ты	млн.
p_i	0,54	0,3	0,1	0,05	0,01

Числовые характеристики выигрыша:

1) Мо=0, т.к. наибольшая вероятность $p = 0{,}54$ (отсюда поговорка «в азартные игры с государством не играю» очень велика вероятность проигрыша). Антимода равна 1 млн.

2) Ме =200 тыс. – «идеальное равновесие» находится на третьем месте. Но эти характеристики не отвечают на вопрос: «каков ожидаемый выигрыш?»

3) ***M(X)***$=0 \cdot 0{,}54 + 100 \cdot 0{,}3 + 200 \cdot 0{,}1 + 300 \cdot 0{,}05 + 1000 \cdot 0{,}01 = 75$ тыс. р. *это и есть среднее значение выигрыша, поэтому лотерейный билет должен стоить никак не меньше 75 тыс.р.*

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной величины C равно этой постоянной:

M(C)=C.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

M(CX)=CM(X).

3. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X_1 + X_2 + \cdots + X_m) = M(X_1) + M(X_2) + \cdots + M(X_m).$$

4. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(X_1X_2 \dots X_m) = M(X_1)M(X_2) \dots M(X_m).$$

Пример 5. Пусть ежедневные расходы на обслуживание и рекламу автомобилей в некотором автосалоне составляют в среднем 100 тыс. р., а число продаж X автомашин в течение дня подчиняется следующему закону распределения:

	0						6	7	8	9
	0 ,25	,2	,1	,1	,1	,1	0 ,05	0 ,05	0 ,025	0 ,025

Найти математическое ожидание ежедневной прибыли при цене на машину 150 тыс. р.

Решение. Ежедневная прибыль подсчитывается по формуле

П=(150X-100) тыс. р.

Искомая характеристика М(П) находится с использованием свойств математического ожидания (в тыс. р.):

М(П)=М(150X-100)=150М(X)-100=150· 2,675-100=301,25.

Если в n независимых испытаниях вероятность появления в каждом из них события А постоянна, то ответ на вопрос о среднем числе появления события А дает следующая теорема.

Теорема 1. *Математическое ожидание M(X) числа появлений события A в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании: M(X)=np.*

Пример 6. Найти математическое ожидание числа выигрышных лотерейных билетов, если вероятность выигрыша по одному билету равна 0,015, причем куплено 200 билетов.

Решение. Поскольку приобретение каждого билета является независимым испытанием относительно появления события А- выпадения

выигрыша, то здесь применимы теорема 1 и формула *M(X)=np*. В нашем случае n=200, p=0,015. Получаем M(200)=200·0,015=3.

Отклонение случайной величины от ее математического ожидания

Пусть X случайная величина и M(X) – ее математическое ожидание. Рассмотрим в качестве новой случайной величины разность X-M(X).

Отклонением называют разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием. Пусть закон распределения X известен:

X	x_1	x_2	$\dots x_n$
P	p_1	p_2	$\dots p_n$

Напишем закон распределения отклонения. Для того, чтобы отклонение приняло значение x_1-M(X), достаточно, чтобы случайная величина приняла значение x_1. Вероятность же этого события равна p_1. Аналогично для остальных возможных значений отклонения.

Т.о. отклонение имеет следующий закон распределения:

$X-M(X)$	$x_1-M(X)$	$x_2-M(X)$	$\dots$	$x_n-M(X)$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

<u>Теорема.</u> Математическое ожидание отклонения равно нулю:

$\mathrm{M}[X-M(X)]=0$

<u>Пример 7.</u> Закон распределения дискретной случайной величины X:

X	1	2
p	0,2	0,8

Убедиться, что математическое ожидание отклонения равно нулю.

Решение. M(X)=1*0,+2*0,8=1,8

Найдем возможные значения отклонения, для чего из возможных значений X вычтем математическое ожидание M(X): 1-1,8=-0,8; 2-1,8=0,2.

Напишем закон распределения отклонения:

$X-M(X)$	$-0{,}8$	0,2
p	0,2	0,8

Найдем математическое ожидание отклонения:

$\mathrm{M}[X-M(X)]=(-0{,}8)\cdot 0{,}2+0{,}2\cdot 0{,}8=0$ как и должно быть математическое ожидание.

Дисперсия дискретной случайной величины.

На практике часто требуется оценить рассеяние возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения. Например, в артиллерии важно знать, насколько кучно лягут снаряды вблизи цели, которая должна быть поражена. Такую характеристику называют дисперсией.

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания: $D(X)=M\left[X-M(X)\right]^2$

Пусть случайная величина задана законом распределения

X	x_1	x_2	$\dots x_n$
P	p_1	p_2	$\dots p_n$

Тогда квадрат отклонения имеет следующий закон распределения

$\left[X-M(X)\right]^2$	$\left[x_1-M(X)\right]^2$	$\left[x_2-M(X)\right]^2$	$\dots$	$\left[x_n-M(X)\right]^2$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

По определению дисперсии,

$$D(X)=M\left[X-M(X)\right]^2=\left[x_1-M(X)\right]^2 p_1+\left[x_2-M(X)\right]^2 p_2+\dots+\left[x_n-M(X)\right]^2 p_n$$

Т.о., для того, чтобы найти дисперсию, достаточно вычислить сумму произведений возможных значений квадрата отклонения на их вероятности.

<u>Пример 8.</u> Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

X	1	2	5
P	0,3	0,5	0,2.

Решение. Найдем математическое ожидание :

M(X)=1*0,3+2*0,5+5*0,2=2,3

Найдем все возможные значения квадрата отклонения:

$$\left[x_1-M(X)\right]^2=(1-2{,}3)^2=1{,}69$$
$$\left[x_2-M(X)\right]^2=(2-2{,}3)^2=0{,}09$$
$$\left[x_3-M(X)\right]^2=(5-2{,}3)^2=7{,}29$$

Напишем закон распределения квадрата отклонения:

$\left[X-M(X)\right]^2$	1,69	0,09	7,29
P	0,3	0,5	0,2

По определению, $D(X) = 1{,}69 \cdot 0{,}3 + 0{,}09 \cdot 0{,}5 + 7{,}29 \cdot 0{,}2 = 2{,}01.$

Формула для вычисления дисперсии.

Для вычисления дисперсии удобно пользоваться теоремой.

Теорема. Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Пример 9. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

X	2	3	5
P	0,1	0,6	0,3.

Решение. Найдем математическое ожидание M(X):

$$M(X) = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}6 + 5 \cdot 0{,}3 = 3{,}5$$

Напишем закон распределения случайной величины X^2:

X^2	4	9	25
P	0,1	0,6	0,3.

Найдем математические ожидания $M(X^2)$:

$M(X^2) = 4 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}6 + 25 \cdot 0{,}3 = 13{,}3$

Искомая дисперсия

$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 13{,}3 - (3{,}5)^2 = 1{,}05.$

Свойства дисперсии

1) Дисперсия постоянной величины C равна нулю:

D(C)=0. (постоянная величина сохраняет одно и то же значение и рассеяния, конечно, не имеет)

2) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат: $D(CX) = C^2 D(X)$

3) Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин: $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$

Следствие 1. Дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

Следствие 2. Дисперсия суммы постоянной величины и случайной равна дисперсии случайной величины: $D(C+X)=D(X)$

4) Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий: $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$

Дисперсия числа появления события в независимых испытаниях

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А постоянна.

Теорема. Дисперсия числа появлений события А в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность p появления события постоянна, равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события А в одном испытании: $D(X)=npq$.

Пример 10. Производится 10 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события равна 0,6. Найти дисперсию случайной величины X – числа появлений события в этих испытаниях.

Решение. По условию, n=10, p=0,6.

Вероятность непоявления события q=1-0,6=0,4.

Искомая дисперсия $D(X)=npq$=10*0,6*0,4=2,4.

Среднее квадратическое отклонение

Для оценки рассеяния возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения кроме дисперсии служат и другие характеристики. К их числу относится среднее квадратическое отклонение.

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называют квадратный корень из дисперсии: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины. Т.к. среднее квадратическое отклонение равно квадратному корню из дисперсии, то размерность $\sigma(X)$ совпадает с размерностью X. Поэтому, в тех случаях, когда желательно, чтобы оценка рассеяния имела размерность случайной величины, вычисляют среднее квадратическое отклонение, а не

дисперсию. Например, если X выражается в линейных метрах, то $\sigma(X)$ будет выражаться также в линейных метрах, а $D(X)$- в квадратных метрах.

<u>Пример 11.</u> Случайная величина X задана законом распределения

X	2	3	10
P	0,1	0,4	0,5.

Найти среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

<u>Решение.</u> M(X)=2*0,1+3*0,4+10*0,5=6,4

M(X^2)= $2^2 \cdot 0{,}1 + 3^2 \cdot 0{,}4 + 10^2 \cdot 0{,}5 = 54$

$D(X)$= M(X^2)-$[M(X)]^2 = 54 - 6{,}4^2 = 13{,}04$

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{13{,}04} \approx 3{,}61$

Среднее квадратическое отклонение суммы взаимно независимых случайных величин

Пусть известны средние квадратические отклонения нескольких взаимно независимых случайных величин.

<u>Теорема.</u> Среднее квадратическое отклонение суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин равно квадратному корню из суммы квадратов средних квадратических отклонений этих величин

$$\sigma(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + ... + \sigma^2(X_n)}$$