Задание

1. Изучить теоретический материал темы, законспектировать с примерами типовых задач.

2. Фотоотчет и сообщение присылать на электронную почту

С уважением, Хвастов Александр Николаевич

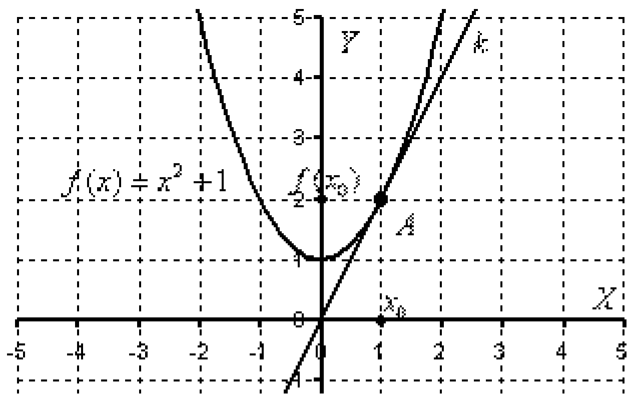
!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721098278 (ватсап). Электронная почта: hvastov@rambler.ru

Уравнение касательной к графику функции

Чтобы закрепить предыдущий параграф, рассмотрим задачу нахождения касательной к графику функции в данной точке. Это задание встречалось нам в школе, и оно же встречается в курсе высшей математики.

Рассмотрим «демонстрационный» простейший пример.

Составить уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$. Я сразу приведу готовое графическое решение задачи (на практике этого делать в большинстве случаев не надо):



Строгое определение касательной дается с помощью определения самой производной функции, и с этим пока повременим. Наверняка практически всем интуитивно понятно, что такое касательная. Если объяснять «на пальцах», то касательная к графику функции – это **прямая**, которая касается графика функции в **единственной** точке. При этом все близлежащие точки прямой расположены максимально близко к графику функции.

Применительно к нашему случаю: при $x_0 = 1$ касательная k (стандартное обозначение) касается графика функции в единственной точке A.

И наша задача состоит в том, чтобы найти уравнение прямой k.

Как составить уравнение касательной в точке с абсциссой x_0?

Общая формула знакома нам еще со школы:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Значение $x_0 = 1$ нам уже дано в условии.

Теперь нужно вычислить, чему равна **сама функция** в точке $x_0 = 1$:

$$f(x_0) = 1^2 + 1 = 2$$

На следующем этапе находим производную:

$$f'(x) = (x^2 + 1)' = 2x$$

Находим производную в точке (задание, которое мы недавно рассмотрели):

$$f'(x_0) = f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

Подставляем значения $x_0 = 1$, $f(x_0) = 2$ и $f'(x_0) = 2$ в формулу $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$:

$$y - 2 = 2(x - 1)$$

$$y - 2 = 2x - 2$$

Таким образом, уравнение касательной:

$$k: y = 2x$$

Это «школьный» вид уравнения прямой с угловым коэффициентом. В высшей математике уравнение прямой принято записывать в так называемой *общей форме* $Ax + By + C = 0$, поэтому перепишем найденное уравнение касательной в соответствии с традицией:

$$k: 2x - y = 0$$

Очевидно, что точка $(x_0; f(x_0)) = (1; 2)$ должна удовлетворять данному уравнению:

$$2 \cdot 1 - 2 = 0$$

$0=0$ – верное равенство.

Следует отметить, что такая проверка является лишь частичной. Если мы неправильно вычислили производную в точке $f'(x_0)$, то выполненная подстановка нам ничем не поможет.

Рассмотрим еще два примера.

Пример 5

Составить уравнение касательной к графику функции $f(x)=e^{\frac{1}{2-x}}$ в точке с абсциссой $x_0=0$

Уравнение касательной составим по формуле $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

1) Вычислим значение функции в точке $x_0=0$:

$$f(x_0)=f(0)=e^{\frac{1}{2-0}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

2) Найдем производную. Дважды используем правило дифференцирования сложной функции:

$$f'(x)=\left(e^{\frac{1}{2-x}}\right)'=e^{\frac{1}{2-x}}\cdot\left(\frac{1}{2-x}\right)'=e^{\frac{1}{2-x}}\cdot((2-x)^{-1})'=$$

$$=-e^{\frac{1}{2-x}}\cdot(2-x)^{-2}\cdot(2-x)'=-\frac{e^{\frac{1}{2-x}}}{(2-x)^2}\cdot(0-1)=\frac{e^{\frac{1}{2-x}}}{(2-x)^2}$$

3) Вычислим значение производной в точке $x_0=0$:

$$f'(x_0)=f'(0)=\frac{e^{\frac{1}{2-0}}}{(2-0)^2}=\frac{\sqrt{e}}{4}$$

4) Подставим значения $x_0=0$, $f(x_0)=\sqrt{e}$ и $f'(x_0)=\frac{\sqrt{e}}{4}$ в формулу $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$:

$$y-\sqrt{e}=\frac{\sqrt{e}}{4}(x-0)$$

$$y-\sqrt{e}=\frac{\sqrt{e}}{4}x$$

$4(y-\sqrt{e})=\sqrt{e}x$

$4y-4\sqrt{e}=\sqrt{e}x$

$k:\sqrt{e}x-4y+4\sqrt{e}=0$

Готово.

Выполним частичную проверку:

Подставим точку $(x_0; f(x_0))=(0;\sqrt{e})$ в найденное уравнение:

$\sqrt{e}\cdot 0-4\sqrt{e}+4\sqrt{e}=0$

$0=0$ – верное равенство.

Пример 6

Составить уравнение касательной к графику функции $f(x)=-\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$ в точке с абсциссой $x_0=\frac{1}{2}$

Полное решение и образец оформления в конце урока.

В задаче на нахождение уравнения касательной очень важно ВНИМАТЕЛЬНО и аккуратно выполнить вычисления, привести уравнение прямой к общему виду.