Задание

1. Повторить теоретический материал, решить задачи для самостоятельного решения.

2. Фотоотчет присылать на электронную почту

С уважением, Хвастов Александр Николаевич

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721098278.

Электронная почта: hvastov@rambler.ru

Практическая работа на тему: «**Вычисление определенного интеграла с помощью формулы Ньютона-Лейбница**»

Цель: вырабатывать навыки интегрирования по формуле Ньютона-Лейбница.

Краткие теоретические сведения

1. Определение определенного интеграла

Определенным интегралом *(интегралом)* от функции f(x) на отрезке [a,b] называется приращение первообразной F(x) этой функции и обозначается:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (1)$$

Эта формула (1) называется ***формулой Ньютона - Лейбница***.

Для любой функции f(x), непрерывной на отрезке [a,b], всегда существует определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Примеры: Найти следующие интегралы:

$$1).\int_{-1}^{2} x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1}\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$2).\int_1^2 2(3x-1)^2 dx = \int_1^2 2(9x^2 - 6x + 1)dx = \int_1^2 (18x^2 - 12x + 2)dx =$$

$$= \left(18 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} - 12 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} + 2x\right)\Bigg|_1^2 = (6x^3 - 6x^2 + 2)\Bigg|_1^2 = (6 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 2) -$$

$$-(6 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 2) = (48 - 24 + 2) - (6 - 6 + 2) = 26 - 2 = 24$$

3. Интегрирование определенных интегралов методом замены переменной (метод подстановки).

При вычислении определенного интеграла методом замены переменной (способом подстановки) определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ преобразуется с помощью подстановки t=g(x) в определенный интеграл относительно новой переменной t.

При этом старые пределы интегрирования a и b заменяются соответственно новыми пределами интегрирования α и β, которые находятся из основной подстановки.

Из первой подстановки новые пределы интегрирования вычисляются α=g(a) и β=g(b).

Из второй подстановки новые пределы интегрирования находятся путем решения уравнений a=g(α) и b=g(β) относительно α и β.

Таким образом, имеем

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[g(t)]\cdot g'(t)dt = \int_\alpha^\beta F(t)dt \qquad (7)$$

Примеры: Найти следующие интегралы:

1). $\int_2^3 (2x-1)^3 dx$.

Обозначим $t = 2x-1$, тогда найдем дифференциал функции $dt = (2x-1)'dx$, откуда $dt = 2dx$, следовательно, $dx = \frac{1}{2}dt$.

Далее находим пределы интегрирования по новой переменной t, которые определяются из значения подъинтегральной функции, где вместо x подставляем значения 2 и 3.

Находим нижний предел $\alpha = 2\cdot 2-1 = 4-1 = 3$, тогда верхний предел $\beta = 2\cdot 3-1 = 6-1 = 5$.

Подставим найденные значения t и dx, и новые пределы интегрирования α и β в исходный интеграл и, тогда получим

$$\int_2^3 (2x-1)^3 dx = \frac{1}{2}\int_3^5 t^3 dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^4}{4}\Big|_3^5 = \frac{t^4}{8}\Big|_3^5 = \frac{1}{8}t^4\Big|_3^5 = \frac{1}{8}(5^4-3^4) =$$

$$= \frac{1}{8}(625-81) = \frac{1}{8}\cdot 544 = 68$$

2). $\int_1^2 \frac{dx}{(4x+1)^4}$.

Обозначим $t = 4x+1$, далее находим дифференциал функции $dt = (4x+1)'dx$, откуда $dt = 4dx$, следовательно, $dx = \frac{1}{4}dt$. Таким образом

Далее находим пределы интегрирования по новой переменной t, которые определяются из значения подынтегральной функции, где вместо x подставляем значения 1 и 2.

Находим нижний предел $\alpha = 4\cdot 1 - 1 = 4 - 1 = 3$, тогда верхний предел $\beta = 4\cdot 2 - 1 = 8 - 1 = 7$.

Подставим найденные значения t и dx, и новые пределы интегрирования α и β в исходный интеграл и, тогда получим

$$\int_1^2 \frac{dx}{(4x+1)^4} = \int_1^2 (4x+1)^{-4} dx = \frac{1}{4}\int_3^7 t^{-4} dt = \frac{1}{4}\cdot\frac{t^{-4+1}}{-4+1}\Big|_3^7 = \frac{t^{-3}}{-12}\Big|_3^7 =$$

$$= -\frac{1}{12t^3}\Big|_3^7 = -\frac{1}{12}\left(\frac{1}{7^3}-\frac{1}{3^3}\right) = -\frac{1}{12}\left(\frac{1}{343}-\frac{1}{27}\right) = -\frac{1}{12}\left(\frac{27-343}{343\cdot 27}\right) = .$$

$$= -\frac{1}{12}\left(\frac{-316}{343\cdot 27}\right) = \frac{316}{12\cdot 343\cdot 27} = \frac{79}{3\cdot 343\cdot 27}$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задание 1. Найти следующие интегралы:

№ варианта	Исходные данные	№ варианта	Исходные данные
Вариант 1	$\int_{-1}^{2}(5x^3-5x^2+4x+6)dx$	Вариант 9	$\int_{1}^{2}(2x^3-5x^2+9x+6)dx$
Вариант 2	$\int_{1}^{2}(6x^3+4x^2-4x+7)dx$	Вариант 10	$\int_{-1}^{2}(3x^3+4x^2-8x+7)dx$
Вариант 3	$\int_{-1}^{2}(7x^3-3x^2+4x+8)dx$	Вариант 11	$\int_{1}^{2}(4x^3-3x^2+7x+8)dx$

Вариант 4	$\int_{1}^{2}(8x^3+2x^2-4x+9)dx$	Вариант 12	$\int_{-1}^{2}(5x^3+2x^2-6x+9)dx$
Вариант 5	$\int_{-1}^{2}(9x^3-9x^2+4x+2)dx$	Вариант 13	$\int_{1}^{2}(6x^3-9x^2+5x+2)dx$
Вариант 6	$\int_{1}^{2}(2x^3+8x^2-4x+3)dx$	Вариант 14	$\int_{-1}^{2}(7x^3+8x^2-4x+3)dx$
Вариант 7	$\int_{-1}^{2}(3x^3-7x^2+4x+4)dx$	Вариант 15	$\int_{1}^{2}(8x^3-7x^2+3x+4)dx$
Вариант 8	$\int_{1}^{2}(4x^3+6x^2-4x+5)dx$	Вариант 16	$\int_{-1}^{2}(9x^3+6x^2-2x+5)dx$

Задание 2. Найти следующие интегралы:

№ варианта	Исходные данные	№ варианта	Исходные данные
Вариант 1	$\int_{0}^{2}11(2x^2-1)^2dx$	Вариант 9	$\int_{0}^{1}2(4x^2+1)^2dx$
Вариант 2	$\int_{0}^{1}10(3x^2+2)^2dx$	Вариант 10	$\int_{0}^{2}3(3x^2-2)^2dx$
Вариант 3	$\int_{0}^{2}9(2x^2-1)^2dx$	Вариант 11	$\int_{0}^{1}4(2x^2+3)^2dx$
Вариант 4	$\int_{0}^{1}8(x^2+2)^2dx$	Вариант 12	$\int_{0}^{2}5(x^2-4)^2dx$
Вариант 5	$\int_{0}^{2}7(4x^2-3)^2dx$	Вариант 13	$\int_{0}^{1}5(4x^2+5)^2dx$
Вариант 6	$\int_{0}^{1}6(3x^2+4)^2dx$	Вариант 14	$\int_{0}^{2}7(3x^2-1)^2dx$
Вариант 7	$\int_{0}^{2}5(2x^2-3)^2dx$	Вариант 15	$\int_{0}^{1}8(2x^2+2)^2dx$
Вариант 8	$\int_{0}^{1}4(x^2+1)^2dx$	Вариант 16	$\int_{0}^{2}9(x^2-3)^2dx$

Задание 3. Найти следующие интегралы:

№ варианта	Исходные данные	№ варианта	Исходные данные
Вариант 1	$\int_{1}^{3}(6x-4)^2dx$	Вариант 9	$\int_{1}^{2}(9-2x)^5dx$
Вариант 2	$\int_{2}^{3}(5+3x)^3dx$	Вариант 10	$\int_{1}^{3}(2x+3)^3dx$
Вариант 3	$\int_{1}^{2}(8x-2)^4dx$	Вариант 11	$\int_{1}^{2}(4-2x)^4dx$

Вариант 4	$\int_1^2 (1+9x)^5 dx$	Вариант 12	$\int_1^2 (2x+5)^5 dx$
Вариант 5	$\int_1^3 (7-2x)^3 dx$	Вариант 13	$\int_1^3 (6-2x)^3 dx$
Вариант 6	$\int_1^2 (2x+8)^4 dx$	Вариант 14	$\int_1^2 (2x+4)^5 dx$
Вариант 7	$\int_2^3 (7-2x)^3 dx$	Вариант 15	$\int_1^3 (2x-1)^2 dx$
Вариант 8	$\int_1^2 (2x+8)^3 dx$	Вариант 16	$\int_2^3 (7+3x)^3 dx$

Задание 4. Найти следующие интегралы методом замены переменной:

№ варианта	Исходные данные	№ варианта	Исходные данные
Вариант 1	$\int_0^1 5(6+x^4)^3 x^3 dx$	Вариант 9	$\int_0^1 4(x^2-6)^4 x dx$
Вариант 2	$\int_0^2 6(x^2+3)^4 x\ dx$	Вариант 10	$\int_0^2 5(6+x^4)^3 x^3 dx$
Вариант 3	$\int_0^3 7(x^3-4)^2 x^2 dx$	Вариант 11	$\int_0^3 6(x^2+3)^4 x dx$
Вариант 4	$\int_0^4 7(5-x^3)^3 x^2 dx$	Вариант 12	$\int_0^4 7(x^3-4)^2 x^2 dx$
Вариант 5	$\int_1^2 6(x^4+5)^3 x^3 dx$	Вариант 13	$\int_1^2 7(5-x^3)^3 x^2 dx$
Вариант 6	$\int_1^3 5(x^5-2)^4 x^4 dx$	Вариант 14	$\int_1^3 6(x^4+5)^3 x^3 dx$
Вариант 7	$\int_1^4 2(7-x^4)^2 x^3 dx$	Вариант 15	$\int_1^4 5(x^5-2)^4 x^4 dx$
Вариант 8	$\int_2^3 3(x^3+8)^3 x^2 dx$	Вариант 16	$\int_2^3 4(2+x^3)^4 x^2 dx$

Задание 11. Найти следующие интегралы методом замены переменной:

№ варианта	Исходные данные	№ варианта	Исходные данные
Вариант 1	$\int_0^1 2^{3x^2} x dx$	Вариант 9	$\int_1^2 e^{3x^2+3} x dx$
Вариант 2	$\int_0^2 3^{4x^2} x dx$	Вариант 10	$\int_1^3 e^{4x^3-4} x^2 dx$
Вариант 3	$\int_0^3 4^{5x^2} x dx$	Вариант 11	$\int_1^4 e^{2x^4+5} x^3 dx$

Вариант 4	$\int_0^4 5^{6x^2} xdx$	Вариант 12	$\int_2^3 e^{3x^2-6} xdx$
Вариант 5	$\int_1^2 2^{3x^2} xdx$	Вариант 13	$\int_0^1 e^{4x^3+7} x^2 dx$
Вариант 6	$\int_1^3 3^{4x^2} xdx$	Вариант 14	$\int_0^2 e^{2x^4-8} x^3 dx$
Вариант 7	$\int_1^4 4^{5x^2} xdx$	Вариант 15	$\int_0^1 e^{2x^2+4} xdx$
Вариант 8	$\int_2^3 5^{6x^2} xdx$	Вариант 16	$\int_0^2 e^{3x^3-5} x^2 dx$