

Задание:

- Написать конспект;
- Решить задания в конце лекции;
- По вопросам обращаться 072-1098278 или [hvastov@rambler.ru](mailto:hvastov@rambler.ru)
- Фотоотчёт конспекта прислать в течение 3 дней со дня получения задания на [hvastov@rambler.ru](mailto:hvastov@rambler.ru)

## Нахождение скорости для процесса заданной формой и графиком

### План

1. механический смысл первой производной;
2. механический смысл второй производных;
3. скорость и ускорение.

**Производная  $y'(x)$  функции  $y=f(x)$  – это мгновенная скорость изменения этой функции.** В частности, если зависимость между пройденным путём  $S$  и временем  $t$  при прямолинейном неравномерном движении выражается уравнением  $S=f(t)$ , то для нахождения мгновенной скорости точки в какой-нибудь определённый момент времени  $t$  нужно найти производную  $S'=f'(t)$  и подставить в неё соответствующее значение  $t$ , то есть  $v(t)=S'(t)$ .

Производная от данной функции называется первой производной или производной первого порядка. Но производная функции также является функцией, и если она дифференцируема, то от неё, в свою очередь, можно найти производную.

Производная от производной называется **второй производной** или производной второго порядка и обозначается  $f''(x)$  или  $y''(x) \frac{d^2y}{dx^2}$ .

Производная от второй производной называется производной третьего порядка и обозначается  $y'''$  или  $f'''(x)$ . Производную  $n$ -го порядка обозначают  $f^{(n)}(x)$  или  $y^{(n)}$ .

Если первая производная функции – это мгновенная скорость изменения любого процесса, заданного функцией, то вторая производная – это скорость изменения скорости, то есть ускорение, то есть  $a(t) = v'(t) = S''(t)$

**Первая производная – это скорость изменения процесса, вторая производная – ускорение.** ( $v=S'$ ;  $a=v'$ )

### Основная литература:

Колягин Ю.М., Ткачева М.В., Федорова Н.Е. и др., под ред. Жижченко А.Б. Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни) 11 кл. – М.: Просвещение, 2014.

## Дополнительная литература:

Шабунин М.И., Ткачева М.В., Федорова Н.Е. Дидактические материалы Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни) 11 кл. – М.: Просвещение, 2017.

## Теоретический материал для самостоятельного изучения

Давайте вспомним механический смысл производной:

**Производная  $y'(x)$  функции  $y=f(x)$  – это мгновенная скорость изменения этой функции.** В частности, если зависимость между пройденным путём  $S$  и временем  $t$  при прямолинейном неравномерном движении выражается уравнением  $S=f(t)$ , то для нахождения мгновенной скорости точки в какой-нибудь определённый момент времени  $t$  нужно найти производную  $S'=f'(x)$  и подставить в неё соответствующее значение  $t$ , то есть  $v(t)=S'(t)$ .

**Пример 1.** Точка движется прямолинейно по закону  $S = \frac{t^3}{3} + 2t^2 - t$  ( $S$  выражается в метрах,  $t$  – в секундах). Найти скорость движения через 3 секунды после начала движения.

### Решение:

Скорость прямолинейного движения равна производной пути по времени, то есть  $v(t) = S'(t) = (\frac{t^3}{3} + 2t^2 - t)' = t^2 + 4t - 1$ .

Подставив в уравнение скорости  $t=3$  с, получим  $v(3)=3^2+4\cdot 3-1=20$  (м/с).

Ответ: 20 м/с.

**Пример 2.** Маховик, задерживаемый тормозом, поворачивается за  $t$  с на угол

$\varphi(t) = 4t - 0,2t^2$  (рад). Найдите:

а) угловую скорость вращения маховика в момент  $t = 6$  с;

б) в какой момент времени маховик остановится?

**Решение:** а) Угловая скорость вращения маховика определяется по формуле  $\omega=\varphi'$ . Тогда  $\omega=(4t-0,2t^2)'=4-0,4t$ .

Подставляя  $t = 6$  с, получим  $\omega=4-0,4\cdot 6=1,6$  (рад/с).

б) В тот момент, когда маховик остановится, его скорость будет равна нулю ( $\omega=0$ ). Поэтому  $4-0,4t=0$ . Отсюда  $t=10$  с.

Ответ: угловая скорость маховика равна (рад/с);  $t=10$  с.

**Пример 3.** Тело массой 6 кг движется прямолинейно по закону  $S=3t^2+2t-5$ . Найти кинетическую энергию тела ( $E = \frac{mv^2}{2}$ ) через 3 с после начала движения.

**Решение:** найдём скорость движения тела в любой момент времени  $t$ .

$$v = S' = (3t^2 + 2t - 5)' = 6t + 2$$

Вычислим скорость тела в момент времени  $t=3$ .  $v(3) = 6 \cdot 3 + 2 = 20$  (м/с)..

Определим кинетическую энергию тела в момент времени  $t=3$ .

$$E = \frac{6 \cdot 20^2}{2} = 1200 \text{ (Дж)}$$

Ответ:  $E=1200$  Дж

### Производная второго порядка. Производная n-го порядка.

Производная от данной функции называется первой производной или производной первого порядка. Но производная функции также является функцией, и если она дифференцируема, то от неё, в свою очередь, можно найти производную.

Производная от производной называется **второй производной** или производной второго порядка и обозначается  $f''(x)$  или  $y''(x) \frac{d^2y}{dx^2}$ .

Производная от второй производной называется *производной третьего порядка* и обозначается  $y'''$  или  $f'''(x)$  Производную n-го порядка обозначают  $f^{(n)}(x)$  или  $y^{(n)}$ .

**Примеры.** Найдём производные четвёртого порядка для заданных функций:

1)  $f(x) = \sin 2x$

$$f'(x) = \cos 2x \cdot (2x)' = 2 \cos 2x$$

$$f''(x) = -2 \sin 2x \cdot (2x)' = -4 \sin 2x$$

$$f'''(x) = -4 \cos 2x \cdot (2x)' = -8 \cos 2x$$

$$f^{(4)}(x) = 8 \sin 2x \cdot (2x)' = 16 \sin 2x$$

2)  $f(x) = 2^{3x}$

$$f'(x) = 3 \cdot 2^{3x} \cdot \ln 2$$

$$f''(x) = 9 \cdot 2^{3x} \cdot \ln^2 2$$

$$f'''(x) = 27 \cdot 2^{3x} \cdot \ln^3 2$$

$$f^{(4)}(x) = 81 \cdot 2^{3x} \cdot \ln^4 2$$

### **Механический смысл второй производной.**

Если первая производная функции – это мгновенная скорость изменения любого процесса, заданного функцией, то вторая производная – это скорость изменения скорости, то есть ускорение, то есть  $a(t) = v'(t) = s''(t)$

**Итак, первая производная – это скорость изменения процесса, вторая производная – ускорение.** ( $v = S'$ ;  $a = v'$ )

**Пример 4.** Точка движется прямолинейно по закону  $S(t) = 3t^2 - 3t + 8$ . Найти скорость и ускорение точки в момент  $t = 4$  с.

**Решение:**

найдем скорость точки в любой момент времени  $t$ .

$$v = S' = (3t^2 - 3t + 8)' = 6t - 3.$$

Вычислим скорость в момент времени  $t = 4$  с.

$$v(4) = 6 \cdot 4 - 3 = 21 \text{ (м/с)}$$

Найдем ускорение точки в любой момент времени  $t$ .

$a = v' = (6t - 3)' = 6$  и  $a(4) = 6 \text{ (м/с}^2\text{)}$ , то есть ускорение в этом случае является величиной постоянной.

$$\text{Ответ: } v = 21 \text{ (м/с); } a = v' = 6 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

**Пример 5.** Тело массой 3 кг движется прямолинейно по закону  $S(t) = t^3 - 3t^2 + 5$ . Найти силу, действующую на тело в момент времени  $t = 4$  с.

**Решение:** сила, действующая на тело, находится по формуле  $F = ma$ .

Найдем скорость движения точки в любой момент времени  $t$ .

$$v = S' = (t^3 - 3t^2 + 5)' = 3t^2 - 6t.$$

$$\text{Тогда } v(4) = 3 \cdot 4^2 - 6 \cdot 4 = 24 \text{ (м/с)}.$$

$$\text{Найдем ускорение: } a(t) = v' = (3t^2 - 6t)' = 6t - 6.$$

Тогда  $a(4) = 6 \cdot 4 - 6 = 18 \text{ (м/с}^2\text{)}$ .

$$F = ma = 3 \cdot 18 = 54 \text{ Н}$$

Ответ:  $F = 54 \text{ Н}$

### Разбор решения заданий тренировочного модуля

**№ 1.** Напишите производную третьего порядка для функции:

$$f(x) = 3\cos 4x - 5x^3 + 3x^2 - 8$$

---

Решим данную задачу:

$$f'''(x) = (3\cos 4x - 5x^3 + 3x^2 - 8)''' = (((3\cos 4x - 5x^3 + 3x^2 - 8)'))' = ((-12\sin 4x - 15x^2 + 6x)')' = (-48\cos 4x - 30x)' = 192\sin 4x - 30.$$

**Ответ:**  $192\sin 4x - 30$

**№ 2.** Точка движется прямолинейно по закону  $S(t) = 3t^2 + 2t - 7$ . Найти скорость и ускорение точки в момент  $t = 6 \text{ с}$ .

1.  $v = 38 \text{ м/с}; a = 6 \text{ м/с}^2$
2.  $v = 38 \text{ м/с}; a = 5 \text{ м/с}^2$
3.  $v = 32 \text{ м/с}; a = 6 \text{ м/с}^2$
4.  $v = 32 \text{ м/с}; a = 5 \text{ м/с}^2$

Решим данную задачу:

Вспользуемся механическим смыслом второй производной:

$$v = S'(t) = (3t^2 + 2t - 7)' = 6t + 2.$$

Вычислим скорость в момент времени  $t = 6 \text{ с}$ .

$$v(6) = 6 \cdot 6 + 2 = 38 \text{ (м/с)}$$

Найдём ускорение точки в любой момент времени  $t$ .

$a = v' = (6t + 2)' = 6$  и  $a(6) = 6 \text{ (м/с}^2\text{)}$ , то есть ускорение в этом случае является величиной постоянной.

Ответ:  $v = 38 \text{ (м/с)}; a = v' = 6 \text{ (м/с}^2\text{)}$ .

Верный ответ:

1.  **$v=38 \text{ m/c}; a=6 \text{ m/c}^2$**
2.  $v=38 \text{ m/c}; a=5 \text{ m/c}^2$
3.  $v=32 \text{ m/c}; a=6 \text{ m/c}^2$
4.  $v=32 \text{ m/c}; a=5 \text{ m/c}^2$