Уважаемые студенты!

Вам необходимо изучить теоретический материал, рассмотреть решение примеров, составить 5 контрольных вопросов к лекции и ответить на них.

Ответ присылать на электронную почту до 15.05.2022 г.

Электронная почта: hvastov@rambler.ru

Лекция

Числовые ряды. Сходимость и расходимость числовых рядов. Свойства сходящихся рядов. Необходимое условие сходимости ряда. Признак Даламбера.

1. Свойства сходящихся рядов

Определение. *Выражение вида*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ или, подробнее, } a_1 + a_2 + \ldots \qquad (1)$$

называется ***числовым рядом****, а числа* a_k *называются его* ***членами.***

Для определенности будем считать a_1 первым членом ряда, хотя ряд может начинаться и с любого другого члена. Сумма первых n слагаемых ряда (1) называется его ***частичной суммой***, она обозначается через S_n. При этом $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots$

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Определение. *Если существует конечный предел частичных сумм ряда* (1) *при* $n \to \infty$*, то это число называется* ***суммой ряда*** S***,*** *а ряд в этом случае называется* ***сходящимся****:* $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Если предел частичных сумм не

существует (например, равен ∞),то ряд называется ***расходящимся***. У расходящегося ряда сумма не определена.

Рассмотрим теперь простейшие ***свойства рядов.***

1) Пусть числовые ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходятся, и имеют суммы соответственно* $S^{(1)}$ *и* $S^{(2)}$*, тогда ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ *также сходится и его сумма равна* $S^{(1)} + S^{(2)}$.

2) Если ряд (1) сходится, число $c \neq 0$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c a_k$ $(1^{/})$ также сходится и его сумма равна $S = cS^{(1)}$. *Если ряд* (1) *расходится и* $c \neq 0$*, то расходится и ряд* $(1^{/})$.

3) *Если в ряде* (1) *изменить, добавить или отбросить* ***конечное*** *число членов, то сходимость этого ряда не изменится, т.е. если ряд* (1) *сходился, то новый ряд также сходится, а если ряд* (1) *расходился, то новый ряд расходится.*

Изменив конечное число членов сходящегося ряда, можно изменить его сумму, но сходимость ряда при этом не нарушится.

Теорема 1. ***(Необходимый признак сходимости)***. *Если ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, то предел его членов при* $k \to \infty$ *равен* 0*:* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Условие $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ является *необходимым условием* сходимости ряда. Об этом свидетельствует пример ***гармонического ряда*** $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Этот ряд является расходящимся, хотя у него

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0.$$

Следствие (Достаточное условие расходимости). Если $\lim_{k\to\infty} a_k$ не равен нулю, то ряд (1) расходится.

2. Достаточные признаки сходимости для рядов с положительными членами

Пусть имеются два ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (1) и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ (2) с положительными членами $(a_k, b_k > 0)$, удовлетворяющими неравенству $a_k \le b_k$ для всех, за исключением, быть может, конечного числа членов рядов.

Теорема 2 (Первый признак сравнения). *Если ряд* (2) *сходится, то ряд* (1) *также сходится, если же ряд* (1) *расходится, то ряд* (2) *также расходится.*

Пример. Исследуем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$.

Для сравнения используем расходящийся гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. При $n > 2$ $\ln n > 1$ и $\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$, поэтому, согласно первому признаку сравнения, исследуемый ряд расходится.

Для сравнения обычно используют такие известные ряды как геометрическая прогрессия или ряд Дирихле.

Рядом Дирихле называется числовой ряд вида $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$.

Ряд Дирихле при $p > 1$ сходится, а при $p \le 1$ расходится. При $p = 1$ он превращается в гармонический ряд.

Теорема 3 (Предельный признак сравнения). Пусть ряды (1) и (2) с положительными членами таковы, что существует конечный ненулевой предел $q = \lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k}$, $(q > 0)$. Тогда ряды (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно.

Теорема 4 (*Признак Даламбера*). Пусть у ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, где $a_k > 0$ существует предел отношений $q = \lim_{k \to \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$, тогда: а) если $q < 1$, то этот ряд

сходится, в) если $q>1$ или $q=\infty$ этот ряд расходится. При $q=1$ данный признак не применим.

Признак Даламбера удобно применять в тех случаях, когда выражения для членов a_k содержат факториалы и показательные, относительно k, функции.

Теорема 5 (*Радикальный признак Коши*). *Пусть в ряде* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *, где* $a_k>0$*, существует предел* $q=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}$. *Тогда:*а) е*сли* $q<1$*, то этот ряд сходится,*в) е*сли* $q>1$ *или* $q=\infty$*,то этот ряд расходится.* При $q=1$, признак Коши не применим.

Теорема 6 (*Интегральный признак Коши*).

Пусть имеется ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (1) *и несобственный интеграл* $\int_1^{\infty} f(x)dx$, (3) *такие, что выполняются следующие условия:* а) *для целых* $k\geq 1$: $f(k)=a_k$; б) ф*ункция* $y=f(x)$ *непрерывна, неотрицательна и не возрастает на промежутке* $[1,+\infty)$.

Тогда ряд (1) *и интеграл* (3) *сходятся или расходятся одновременно.*

Интегральный признак следует применять в тех случаях, когда возможно интегрирование функции $y=f(x)$.