Задание

1. Ознакомиться с теоретический материалом темы, законспектировать по составленному плану и ответить на контрольные вопросы.

- По вопросам обращаться 072-1098278 или hvastov@rambler.ru
- Фотоотчёт конспекта прислать в течение 3 дней со дня получения задания на hvastov@rambler.ru

Лекция

Тема: Равносильность уравнений, неравенств, систем. Основные приемы решений.

План.

1.Определение равносильных уравнений.
2. Правила выполнения равносильных преобразований.
3. Определение уравнения-следствия.
4. Равносильность неравенств.

Для каждого вида уравнений (неравенств) можно указать простейшие уравнения (неравенства), решение которых осуществляется по некоторому алгоритму. Например, линейные, квадратные и т.д. уравнения (неравенства). В общем же случае процесс решения уравнения (неравенства) состоит в замене данного уравнения (неравенства) другим, более простым, корни (решения) которого не всегда совпадают с корнями (решениями) исходного. Может произойти приобретение посторонних корней (решений) или, наоборот, потеря корней (решений). Самое лучшее, когда от данного уравнения (неравенства) переходят к более простому уравнению (неравенству) с теми же корнями (решениями) – равносильному уравнению (неравенству). Такой переход называется равносильным.

Определение 1. Уравнения, имеющие одно и то же множество корней, называют равносильными.

Определение 2. Уравнения, не имеющие корней, также называют равносильными.

Например, уравнения $4x - 3 = 2x + 3$ и $2x = 6$ равносильны, так как каждое из них имеет только один корень $x=3$. Уравнения $(x-2)(x+5)=0$ и $x^2 + 3x - 10 = 0$ также равносильны, так как они имеют одни и те же корни $x_1=2$, $x_2= -5$. Уравнения $2x=4$ и $3x^2=12$ не равносильны, так как первое имеет корень $x=2$, а второе – корни $x_1=2$, $x_2= -2$. Из определения равносильности следует, что два уравнения равносильны, если каждый корень первого уравнения является корнем второго уравнения и, наоборот, каждый корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

Правило 1. ***Любой член уравнения можно перенести из одной части в другую, изменив его знак на противоположный.***

Правило 2. ***Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.***

При этих преобразованиях исходное уравнение заменяется на равносильное ему уравнение. Однако не при любом преобразовании уравнение заменяется на равносильное. Например, при возведении в квадрат обеих частей уравнения $\sqrt{x} = x - 2$ получается уравнение $x = (x - 2)^2$, не равносильное исходному: первое уравнение имеет только один корень $x=4$, а второе – два корня $x_1=4$, $x_2= 1$. В этом случае второе уравнение называют *следствием* первого уравнения.

Определение 3. Если при переходе от одного уравнения к другому потери корней не происходит, то **второе уравнение** называют **следствием первого уравнения.** Иначе, если все корни первого уравнения являются корнями второго уравнения, то второе уравнение называется *следствием* первого уравнения.

Из этого определения и определения равносильности уравнений следует, что:

1) *если два уравнения равносильны, то каждое из них является следствием другого*;

2) есл*и каждое из двух уравнений является следствием другого, то эти уравнения равносильны*.

При решении уравнений главное – не потерять корни, а наличие посторонних корней можно установить проверкой. Поэтому важно следить за тем, чтобы при преобразовании уравнения каждое следующее уравнение было следствием предыдущего.

Пример 1. Решить уравнение $\frac{2x}{x-2} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{4}{(x-1)(x-2)}$ (*)

Умножив обе части уравнения на общий знаменатель всех трех дробей, т.е. на $(x-1)(x-2)$, получим $2x(x-1)-(x+1)(x-2)=4$ (**), откуда $x^2 - x - 2 = 0$, $x_1=2$, $x_2=-1$. Проверка. 1). При $x=2$ знаменатели двух дробей уравнения равны нулю. Поэтому $x=2$ не является корнем данного уравнения. 2). При $x=-1$ левая часть уравнения равна правой части и равна 2/3. Ответ: $x=-1$.

При решении данного примера из уравнения (*) получено уравнение (**). **Корень** $x_1=2$ **уравнения** (**) **не является корнем уравнения** (*). **Его называют посторонним корнем.**

Правило 3. ***Посторонние корни могут получиться при умножении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное.***

Пример 2. Решить уравнение $x^2 - 4 = 7x - 14$.

Преобразуем в $(x+2)(x-2)=7(x-2)$ (***), откуда $(x+2-7)(x-2)=0$, т.е. $(x-5)(x-2)=0$, следовательно, $x_1=5$, $x_2=2$. Если обе части уравнения (***) разделить на x-

2, то получится уравнение x+2=7, которое имеет только один корень x=5, т.е. произойдет потеря корня x=2, и решение примера будет неверным.

Правило 4. ***Потеря корней может произойти при делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное.***

Итак, при решении уравнения можно делать такие его преобразования, при которых не происходит потери корней. Если при этом получаются уравнения-следствия данного, то необходима проверка найденных корней.

Равносильность неравенств с неизвестным определяется аналогично.

Определение 4. Неравенства, имеющие одно и то же множество решений, называют равносильными. Неравенства, не имеющие решений, также являются равносильными.

Например неравенства $\frac{x-3}{x^2+1} < 0$ и $x-3<0$ равносильны, так как имеют одно и то же множество решений $x<3$. Неравенства $x^2 - 4<x-6$ и $x^2 -5x +6<0$ равносильны, так как имеют одно и то же множество решений $2<x<3$. Неравенства $\frac{2x}{x-1} > 1$ и $2x>x-1$ не равносильны, так как решениями первого являются числа $x<-1$ и $x>1$, а решениями второго- числа $x>-1$. При решении неравенств обычно данное неравенство преобразуется ему в равносильное.

Контрольные вопросы.

1. Какие уравнения называются равносильными?
2. Дать определение уравнения-следствия.
3. Назовите правила преобразований данного уравнения в уравнение-следствие.
4. Причины потери корней при решении уравнений.
5. Какие неравенства называются равносильными?.