Уважаемые студенты!

Вам необходимо изучить теоретический материал, рассмотреть решение примеров, ответить на контрольные вопросы.

Ответ присылать на электронную почту до 01. 06.

Электронная почта: hvastov@rambler.ru

Лекция

Однородные дифференциальные уравнения I порядка

План

1. Однородные дифференциальные уравнения I порядка.
2. Правила решения однородных дифференциальных уравнений I порядка.
3. Примеры решения однородных дифференциальных уравнений I порядка.

Легко можно убедиться в том, что дифференциальные уравнения

$$y' = \frac{y - x}{y + x}; \qquad y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}; \qquad y\,dx = (x + y)\,dy$$

не являются уравнениями с разделяющимися переменными. Они являются **однородными уравнениями.**

Определение. Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется **однородным дифференциальным уравнением первого порядка,** если $f(x, y)$ – однородная функция нулевого измерения.

Дадим понятие однородной функции нулевого измерения.

Определение. Функция $f(x, y)$ называется **однородной функцией нулевого измерения,** если при любом t справедливо тождество $f(t \cdot x;\ t \cdot y) = f(x, y)$.

Так, функции $f_1(x, y) = \frac{y - x}{y + x}$; $f_2(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$ – однородные функции нулевого измерения, т. к.

$$f_1(t \cdot x, t \cdot y) = \frac{ty - tx}{ty + tx} = \frac{t(y - x)}{t(y + x)} = \frac{y - x}{y + x} = f_1(x, y);$$

$$f_2(tx; yt) = \frac{(tx)^2 + (ty)^2}{2(tx) \cdot (ty)} = \frac{t^2x^2 + t^2y^2}{2tx \cdot ty} = \frac{t^2(x^2 + y^2)}{t^2(2xy)} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = f_2(x, y).$$

Чтобы проверить, является ли д. у.1 однородным уравнением, нужно в этом уравнении заменить x на tx, y на ty. Если после этого t всюду сократится и получится первоначальное уравнение, то данное уравнение – **однородное.**

Поэтому уравнение $y\,dx = (x + y)\,dy$ является однородным. Действительно,

$t \cdot y dx = (xt + yt)\,dy$; $t \cdot y dx = t \cdot (x + y)\,dy$; сократив уравнение на t, получим исходное уравнение.

Решение однородного дифференциального уравнения первого порядка

Так как функция $f(x, y)$ в правой части уравнения $y' = f(x, y)$ является однородной функцией нулевого измерения, то, по определению, $f(tx, yt) = f(x, y)$. Положим в этом тождестве $t = \frac{1}{x}$, получим $f(x, y) = f\left(1; \frac{y}{x}\right)$, т. е. однородная функция нулевого измерения зависит только от отношения *y/x.* Д.у.1 в этом случае примет вид

$$y' = f\left(1; \frac{y}{x}\right).$$

Сделаем подстановку *y/x*=u, т. е. $y = x \cdot u$,

где $u = u(x)$ - неизвестная функция.

Тогда $y' = u + x \cdot u'$.

Уравнение $y' = f\left(1; \frac{y}{x}\right)$ примет вид $u + x \cdot u' = f(1; u)$ или $x \cdot u' = f(1; u) - u$, или $x \cdot \frac{du}{dx} = f(1; u) - u$ – уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{du}{f(1,\ u)-u}=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, находим $\int\frac{du}{f(1,\ u)-u}=\int\frac{dx}{x}+c$.

Найдя отсюда выражение u как функции от *x*, подставим его в равенство $y=x\cdot u;$ получим искомое общее решение однородного д.у.1. Чаще всего не удается найти явное выражение функции $u(x).$ Тогда после интегрирования следует

в левую часть вместо u подставить $y/x.$ В результате получим общий интеграл (т. е. общее решение в неявном виде).

Решим уравнения.

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'=\frac{x^2+y^2}{2xy}.$$

Решаем уравнение подстановкой $y=x\cdot u;\quad y'=u+xu'$. Подставив y и y' в данное уравнение, получим

$$u+xu'=\frac{x^2+u^2x^2}{2x\cdot ux} \text{ или } xu'=\frac{1+u^2}{2u}-u.$$

Получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными относительно вспомогательной функции $u(x).$ Упростим правую часть:

$x\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1-u^2}{2u}.$ Умножив на $\frac{dx\cdot 2u}{x\cdot(1-u^2)}$, получим уравнение с разделенными переменными $\frac{2u\,du}{1-u^2}=\frac{dx}{x}.$

Интегрируя, получим $-\ln|1-u^2|=\ln|x|-\ln|c|;$

или $\ln|1-u^2|=\ln|c|-\ln|x|,$

или $\ln|1-u^2|=\ln\left|\frac{c}{x}\right|;$

Потенцируем $1-u^2=\frac{c}{x};\qquad u^2=1-\frac{c}{x}=\frac{x-c}{x}.$

Подставив $u = y/x$, получим общий интеграл данного дифференциального уравнения.

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{x - c}{x}; \qquad \frac{y^2}{x} = x - c; \qquad y^2 = x^2 - xc; \qquad x^2 - y^2 = xc.$$

Проверка: $\begin{cases} 2x - 2y \cdot y' = c \\ x^2 - y^2 = cx \end{cases}$

$x^2 - y^2 = 2x^2 - 2xy \cdot y'$ или $2xyy' = x^2 + y^2$; $\quad y' = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$ – искомое уравнение.

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения $x \cdot dy - \left(y + \sqrt{x^2 - y^2}\right) dx = 0$ при начальных условиях $y(1) = \pi$.

Убедимся, что данное дифференциальное уравнение является однородным. Подставим в уравнение вместо x и y соответственно $t \cdot x$ и $t \cdot y$. Получим

$$t \cdot x\, dy - \left(t\, y + \sqrt{(t\, x)^2 - (t\, y)^2}\, dx\right) = 0;$$

$$t \cdot x\, dy - t \cdot \left(y + \sqrt{x^2 - y^2}\right) dx = 0.$$

Разделив на t обе части уравнения, получим данное уравнение. Решаем уравнение подстановкой

$$y = x \cdot u; \qquad dy = u \cdot dx + x \cdot du.$$

Поставим y и dy в уравнение, получим

$$x \cdot (u\, dx + x\, du) - \left(u\, x + \sqrt{x^2 - u^2 x^2}\right) dx = 0.$$

Сгруппируем слагаемые с dx и du.

$x^2 du = x\sqrt{1 - u^2}\, dx$ –это уравнение с разделяющимися переменными. Разделив обе части на $x^2 \cdot \sqrt{1 - u^2}$, получим

$\dfrac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \dfrac{dx}{x}$ –уравнение с разделенными переменными. Интегрируя левую и правую части уравнения, получим

$$\arcsin u = \ln|x| + \ln|c|.$$

Подставив $u = \frac{y}{x}$, получим общий интеграл данного дифференциального уравнения:

$$\arcsin \frac{y}{x} = \ln|xc|.$$

Найдем частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данным начальным условиям $y = \pi$ при $x = 1$.

Подставим в формулу общего интеграла $y = \pi,\ x = 1$:

$\arcsin \frac{\pi}{1} = \ln 1 \cdot c; \quad 0 = \ln c,$ отсюда $c = 1$ и частный интеграл

$$\arcsin \frac{y}{x} = \ln|x|.$$

Контрольные вопросы

1. Какие уравнения называются дифференциальными?
2. Какие уравнения называются однородными дифференциальными?
3. Как решить однородное дифференциальное уравнение?
4. Как найти частное решение однородного дифференциального уравнения?