Задание:

- Написать конспект,
- Решить задания в конце лекции
- Скриншот ответов прислать до 26.05 на hvastov@rambler.ru

Лекция. (2 пары)

Тема: Первообразная и неопределённый интеграл. Интегралы основных элементарных функций.

План.

1. Задачи интегрирования.
2. Первообразная и основное свойство первообразной.
3. Понятие неопределенного интеграла. Свойства неопределённого интеграла.
4. Основный формулы интегрирования.
5. Непосредственное интегрирование.

Задачи интегрирования.

Напомним, что *дифференцирование* – это действие, с помощью которого по данной функции находится её производная или дифференциал.

Например, если $f(x)=x^5$, то $f'(x)=5x^4$, $df(x)=5x^4dx$.

Как мы знаем, нахождение производной имеет большое практическое значение. Так, по данному закону движения тела $s=s(t)$ мы путем дифференцирования находили скорость $v(t)=s'(t)$, а затем и ускорение $a(t)=s''(t)=v'(t)$.

На деле, однако, часто приходится решать обратную задачу: по известной скорости движения устанавливать закон движения, иначе говоря, по данной производной находить функцию, от которой найдена эта производная, т.е. выполнять действие обратное дифференцированию. Это действие называется *интегрированием*. С помощью интегрирования по данной производной или дифференциалу функции находится сама функция.

Например, если $F'(x)=9x^8$, то $F(x)=x^9$, так как $\left(x^9\right)'=9x^8$.

Первообразная и основное свойство первообразной.

Дифференцируемая функция $F(x)$ на заданном промежутке a < x< b называется **первообразной** для функции $f(x)$ на этом промежутке, если для каждого a < x< b выполняется равенство

$$\boxed{F'(x)=f(x)}$$

Так,

- для функции $f(x)=\cos x$ первообразной служит функция $F(x)=\sin x$, поскольку $(\sin x)'=\cos x$,
- для $f(x)=x-F(x)=\frac{x^2}{2}$ и $F(x)=\frac{x^2}{2}-4$, поскольку $\left(\frac{x^2}{2}\right)'=x$ и $\left(\frac{x^2}{2}-4\right)=x$.

Для заданной функции ее первообразная определяется неоднозначно.

! <u>Справедлива теорема:</u> *если функция $F(x)$ - это первообразная для $f(x)$ на некотором промежутке, то и функция $F(x)+C$, где C – любая постоянная, также является первообразной для функции $f(x)$ на этом промежутке.* <u>Обратно:</u> *каждая функция, являющаяся первообразной для $f(x)$ на данном промежутке, может быть записана в виде $F(x)+C$.*

Значит, достаточно найти для данной функции $f(x)$ только одну первообразную функции $F(x)$, чтобы знать все первообразные, так как они отличаются друг от друга только на постоянную величину.

Первообразной для функции $f(x)$ на заданном промежутке называется функция $F(x)$, если для всех x из этого промежутка выполняется равенство

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

$f(x)$	$F(x)$	Доказать, что $F(x)$ является первообразной для $f(x)$ на заданном промежутке.
$2x$	$x^2,\ x \in R$	$F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x),\ x \in R.$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$F'(x) = (2\sqrt{x})' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = f(x),\ x \in (0;+\infty)$.
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$F'(x) = \left(-\frac{1}{x}\right)' = -\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} = f(x),\ x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty).$
$sinx$	$-cosx$	$F'(x) = (-cosx)' = -(-sinx) = sinx = f(x),\ x \in R.$
$cosx$	$sinx$	$f'(x) = (sinx)' = cosx = f(x),\ x \in R.$
$\frac{1}{cos^2x}$	tgx	$F'(x) = (tgx)' = \frac{1}{cos^2x}$, для всех x, кроме $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$
$\frac{1}{sin^2x}$	$-ctgx$	$F'(x) = (-ctgx)' = -\left(-\frac{1}{sin^2x}\right) = \frac{1}{sin^2x} = f(x)$ для всех x, кроме $x = \pi n,\ n \in Z.$
k k — число	kx	$F'(x) = (kx)' = k = f(x),\ x \in R.$
x	$\frac{x^2}{2}$	$F'(x) = \left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x = f(x),\ x \in R.$
x^2	$\frac{x^3}{3}$	$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 = f(x),\ x \in R.$
x^α $\alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$F'(x) = \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = \frac{1}{\alpha+1} \cdot (\alpha+1) \cdot x^\alpha = x^\alpha = f(x),\ x \in R,\ \alpha \neq -1$

Операция нахождения

производной функции — дифференцирование.

первообразной функции — интегрирование.

Интегрирование — операция, обратная дифференцированию.

Основное свойство первообразной

Если $F(x)$ первообразная для $f(x)$, ⇔ $F(x)+c$ — первообразная для $f(x)$. c — произвольная постоянная.

<u>Понятие неопределенного интеграла.</u>

Совокупность всех первообразных функций $F(x)+C$ для функции $f(x)$ на интервале $a < x < b$ называют **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ на этом интервале

и пишут $\boxed{\int f(x)dx = F(x)+C}$, где $f(x)dx$ - подынтегральное выражение; x - переменная интегрирования;

$f(x)$ - подынтегральная функция; C - произвольная постоянная.

Например,

а) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$, так как $(tgx + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;

б) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$, так как $(-ctgx + C)' = \frac{1}{\sin^2 x}$;

в) $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C$, так как $(-\ln|\cos x| + C)' = tgx$.

<u>Свойства неопределенного интеграла.</u>

1. *Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:*

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \qquad d\int f(x)dx = f(x)dx$$

2. *Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции, сложенной с произвольной постоянной, т.е.*

$$\int dF(x)dx = F(x) + C$$

3. *Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:*

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

4. *Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен такой же алгебраической сумме неопределенных интегралов от каждой функции:*

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

<u>Основные формулы интегрирования (табличные интегралы).</u>

1. $\int 0dx = C, C - const$;

2. $\int dx = x + C$;

3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$;

4. $\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{dx}{x} = \int x^{-1}dx = \ln|x| + C$;

5. $\int \frac{1}{x^n}dx = \int \frac{dx}{x^n} = \int x^{n-1}dx = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + C = -\frac{1}{(n-1)\cdot x^{n-1}} + C$;

6. $\int \frac{1}{x^2}dx = \int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}dx = -\frac{1}{x} + C$;

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$;

8. $\int e^x dx = e^x + C$;

24. $\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$;

9. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$**;**

10. $\int \sin x dx = -\cos x + C$**;**

11. $\int \cos x dx = \sin x + C$**;**

12. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$**;**

13. $\int ctg dx = \ln|\sin x| + C$**;**

14. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$**;**

15. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$**;**

16. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$**;**

17. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = -arcctgx + C$**;**

18. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$**;**

19. $\int \dfrac{dx}{-\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + C$**;**

20. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$**;**

21. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arcctg \dfrac{x}{a} + C$**;**

22. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$**;**

23. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$**;**

25. $\int a^{kx} dx = \dfrac{1}{k} \cdot \dfrac{a^{kx}}{\ln a} + C$**;**

26. $\int \sin kx dx = -\dfrac{1}{k}\cos kx + C$**;**

27. $\int \cos kx dx = \dfrac{1}{k}\sin kx + C$**;**

28. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 kx} = \dfrac{1}{k} tgkx + C$**;**

29. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 kx} = -\dfrac{1}{k} ctgkx + C$**;**

30. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 kx} = -\dfrac{1}{k} ctgkx + C$**.**

<u>Непосредственное интегрирование.</u>

Непосредственное интегрирование основано на прямом использовании таблицы интегралов. Здесь могут представиться следующие случаи:

1) данный интеграл находится непосредственно по соответствующему табличному интегралу;
2) данный интеграл после применения свойств непосредственного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам;
3) данный интеграл после элементарных тождественных преобразований над подынтегральной функцией и применяя свойства неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

<u>Примеры</u>

- $\int 5dx = 5\int dx = 5x + C$**;** - на основании свойства **4** постоянный множитель 5 выносим за знак интеграла и, используя формулу 2, находим ответ.
- $\int 6x^2 dx = 6\int x^2 dx = 6 \cdot \dfrac{x^{2+1}}{2+1} + C = 6\dfrac{x^3}{3} + C = 2x^3 + C$**;** - используем свойство **4** и формулу **3**.

- $\int 4\left(x^2 - x + 3\right)dx = 4\int x^2dx - 4\int xdx + 4\int 3dx = 4\frac{x^3}{2} - 4\frac{x^2}{2} + 12x + C = 2x^2 - 2x^2 + 12x + C$ ***;*** **-** используем свойства **3** и **4** и формулы **2,3**.
- $\int 2(3x-1)^2\,dx = \int\left(18x^2 - 12x + 2\right)dx = 18\int x^2dx - 12\int xdx + 2\int dx = 6x^2 + 2x + C$ ***;***
- $\int \frac{x^3 + 3x^2 4x}{x}\,dx = \int\left(x^2 + 3x + 4\right)dx = \int x^2dx + 3\int xdx + 4\int dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + 4x + C$.

Задания

Найдите интегралы:

1. $\int\left(x^4 - \frac{3}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$ ***;***
2. $\int\left(2\sin x - \frac{3}{\cos^2 x}\right)dx$ ***;***
3. $\int\left(\frac{5}{x^3} - \frac{4}{x} + 3x^2 - 2\right)dx$ ***;***
4. $\int\left(\frac{2}{\sin x^2} - 3\cos x + 1\right)dx$ ***;***
5. $\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2}{x^2}\,dx$.

Контрольные вопросы

1. Какое действие называется интегрированием?
2. Какая функция называется первообразной для функции $f(x)$? Каким свойством она обладает?
3. Что такое неопределенный интеграл?
4. Перечислите основные свойства неопределенного интеграла?
5. Напишите основные формулы интегрирования (табличные интегралы).
6. Что понимают под непосредственным интегрированием?