Задание

1. Изучите лекцию; запишите все типовые задачи, рассмотренные в лекции. Решите задачи лоя самостоятельного решения

2. Фотоотчет присылать на электронную почту

С уважением, Хвастова Светлана Ивановна

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721389311 (ватсап).
Электронная почта: xvsviv@rambler.ru

Лекция на тему: «Дискретная случайная величина. Числовые характеристики.»

План

§ 1. Определение дискретной случайной величины. Закон распределения вероятностей.

§2. Числовые характеристики дискретных случайных величин

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИСЕКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Случайная величина X называется *дискретной*, если множество ее возможных значений представляет собой конечную или бесконечную последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$ и если каждое событие вида $X = x_k$, $k = \overline{1,\infty}$, является случайным событием, т.е. имеет определенную вероятность p_k, а именно $P(X = x_k) = p_k$.

Законом распределения вероятностей дискретной случайной величины X называется любое правило, позволяющее находить все вероятности вида $p_k = P(X = x_k)$.

Обычно этот закон задают в виде таблицы

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Здесь $p_1 + p_2 + \ldots p_n = 1$.

Двумерная случайная величина (X, Y) называется дискретной, если ее составляющие X и Y являются дискретными случайными величинами и события $(X = x_i, Y = y_k)$ являются случайными, т.е. определены вероятности p_{ik} вида

$$p_{ik} = P(X = x_i, Y = y_k) = p(x_i, y_k).$$

Обычно двумерная дискретная случайная величина задается в виде таблицы с двумя входами:

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\dots$	x_n	g_k
y_1	p_{11}	p_{21}	$\dots$	p_{n1}	g_1
y_2	p_{12}	p_{22}	$\dots$	p_{n2}	g_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_m	p_{1m}	p_{2m}	$\dots$	p_{nm}	g_m
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n	$p=1$

Здесь $p_i = P(X = x_i)$, $g_k = P(Y = y_k)$, $p_i = \sum_{k=1}^{m} p_{ik}$, $g_k = \sum_{i=1}^{n} p_{ik}$, $p = \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{m} g_k = 1$.

Условным законом распределения составляющей X при $Y = y_k$ (k сохраняет одно и то же значение при всех возможных значениях X) называют совокупность условных вероятностей вида:

$$p(x_1|y_k), p(x_2|y_k), \dots, p(x_n|y_k),,$$

где $p(x_i|y_k) = P_{y=y_k}(X = x_i)$.

Эти вероятности вычисляются по формулам:

$$p(x_i|y_k) = \frac{p(x_i, y_k)}{p(y_k)} .$$

Например,

$$p(x_2 \mid y_1) = \frac{p_{21}}{y_1}$$

№ 1. В партии из семи деталей имеются четыре стандартных. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X - числа стандартных деталей среди трех отобранных. Найти наивероятнейшее число стандартных деталей.

Решение. Случайная величина X принимает следующие возможные значения: $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3.$ Найдем вероятности этих возможных значений (см. № 2):

$$P(X = x_1) = P(X = 0) = \frac{C_4^0 \cdot C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35},\ P(X = x_2) = P(X = 1) = \frac{C_4^1 \cdot C_3^2}{C_7^3} = \frac{12}{35},$$

$$P(X = x_3) = P(X = 2) = \frac{C_4^2 \cdot C_3^1}{C_7^3} = \frac{18}{35},\ P(X = x_4) = P(X = 3) = \frac{C_4^3 \cdot C_3^0}{C_7^3} = \frac{4}{35}.$$

Составим закон распределения вероятностей:

X	0	1	2	3
p	1/35	12/35	18/35	4/35

Контроль: $\frac{1}{35}+\frac{12}{35}+\frac{18}{35}+\frac{4}{35}=1.$

Так как 18/35 - наибольшая из вероятностей, то наивероятнейшее число стандартных деталей среди трех отобранных равно двум.

№ 2. Задана дискретная двумерная случайная величина (X,Y):

X / Y	$x_1=1$	$x_1=3$	$x_1=5$
$y_1=2$	0,1	0,2	0,25
$y_2=6$	0,3	0,1	0,05

Найти: а) безусловные законы распределения составляющих; б) условный закон распределения составляющей X при условии, что составляющая Y приняла значение $y_2=6$; в) условный закон распределения Y при условии, что $X=x_1=1$.

Решение. а) Сложив вероятности по "столбцам", найдем безусловный закон распределения X:

X	1	3	5
p	0,4	0,3	0,3

Сложив вероятности по "строкам", найдем безусловный закон распределения Y:

Y	2	6
p	0,55	0,45

б) Найдем условные вероятности возможных значений X при условии, что составляющая Y приняла значение $y_2=6$:

$$p(x_1|y_2)=\frac{p(x_1,y_2)}{p(y_2)}=\frac{0,3}{0,45}=\frac{2}{3},$$

$$p(x_2|y_2)=\frac{p(x_2,y_2)}{p(y_2)}=\frac{0,1}{0,45}=\frac{2}{9},$$

$$p(x_3|y_2)=\frac{p(x_3,y_2)}{p(y_2)}=\frac{0,05}{0,45}=\frac{1}{9}.$$

Напишем условный закон распределения X:

X	1	3	5
$p(x\|y_2)$	2/3	2/9	1/9

Контроль: 2/3+2/9+1/9=1.

в) Аналогично найдем условный закон распределения Y при $X = x_1 = 1$:

Y	2	6
$p(Y\|x_1)$	1/4	3/4

Контроль: 1/4+3/4=1.

Задача для самостоятельного решения. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы (за время t) первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,9, 0,8 и 0,7. Составить закон распределения дискретной случайной величины X - числа отказавших элементов за время t. Найти наивероятнейшее число отказавших элементов.

§ 2. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Если дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей вида:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

то математическое ожидание $M(X)$ величины X вычисляется по формуле

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k .$$

Математическое ожидание $M(X)$ случайной величины X служит характеристикой среднего значения величины X. В задачах принятия решений математическое ожидание, например, характеризует доходность инвестиционного проекта.

Дисперсией случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 ,$$

или

$$D(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - M(X))^2 \cdot p_k .$$

Дисперсию удобно вычислять по формулам:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 ,$$

или

$$D(X)=\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot p_k - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k p_k\right)^2 .$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины называют корень квадратный из дисперсии:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение характеризуют рассеивание возможных значений случайной величины вокруг ее математического ожидания (среднего значения). В задачах принятия решений среднее квадратическое отклонение служит мерой риска.

№ 3. Задан закон распределения дискретной случайной величины *X*.

X	34	40	42	45
p	0,3	0,4	0,1	0,2

Найти: а) математическое ожидание $M(X)$; б) дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Решение.

а) Математическое ожидание $M(X)$ вычислим по формуле:

$$M(X)=\sum_{k=1}^{n} x_k p_k .$$

Следовательно,

$$M(X)=34\cdot 0{,}3+40\cdot 0{,}4+42\cdot 0{,}1+45\cdot 0{,}2=39{,}4.$$

б) Дисперсию вычислим по формуле

$$D(X)=\sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k - [M(X)]^2 .$$

Следовательно,

$$D(X)=34^2\cdot 0{,}3+40^2\cdot 0{,}4+42^2\cdot 0{,}1+45^2\cdot 0{,}2-39{,}4^2=15{,}84.$$

И среднее квадратическое отклонение равно:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{15{,}84}\approx 3{,}98.$$

Ответ: $M(X)=39{,}4$; $D(X)=15{,}84$; $\sigma(X)=3{,}98$.

№ 4. В условиях задачи № 61 найти: условные математические ожидания составляющие X при $Y=y_2=6$, и Y при $X=x_1=1$.

Решение. $M(X|Y=6)=1\cdot\frac{2}{3}+3\cdot\frac{2}{9}+5\cdot\frac{1}{9}=\frac{17}{9}$,

$$M(Y|X=1)=2\cdot 0{,}25+6\cdot 0{,}75=5.$$

Ответ: 2,8; 5.

Понятие математического ожидания широко используется в микроэкономике при принятии решений в условиях неопределенности, с использованием понятия ожидаемой полезности инвестора или лица, принимающего решение (ЛПР). Рассмотрим в качестве иллюстрации следующий пример.

№ 5. Пусть ЛПР с функцией полезности $U=ln\,X$ обладает начальным капиталом в 10000 руб.

1. ЛПР может принять участие в игре, в которой он с вероятностью 0,5 может выиграть или проиграть 2000 руб. Имеет ли ему смысл покупать страховой полис, устраняющий риск, за 500 руб., или не играть.

2. ЛПР рискнул, принял участие в игре и проиграл. Следует ли ему снова принять участие в игре, или застраховать свой риск на прежних условиях.

Решение. 1. Закон распределения вероятностей капитала ЛПР при участии в игре без страховки имеет вид:

X	8000	1200
p	0,5	0,5

Тогда полезность такого решения будет равна

$$U_1=0{,}5\,ln\,8000+0{,}5\,ln\,12000=9{,}190 \text{ ют.}$$

При покупке страхового полиса закон распределения вероятностей капитала ЛПР имеет вид:

X	9500	11500
p	0,5	0,5

с полезностью

$$U_2=0{,}5\,ln\,9500+0{,}5\,ln\,11500=9{,}255 \text{ ют.}$$

Если вычислить первоначальную полезность ЛПР:

$$U_0=ln\,10000=9{,}210 \text{ ют.},$$

то можно сделать вывод о том, что ЛПР следует играть, застраховав свой риск, а без страховки лучше и не играть.

2.После проигрыша капитал ЛПР составит 8000 руб., поэтому его участие в игре второй раз будет иметь следующую полезность:

а) без страховки

$$U_1 = 0{,}5\,ln\,6000 + 0{,}5\,ln\,10000 = 8{,}955 \text{ ют.};$$

б) со страховкой

$$U_2 = 0{,}5\,ln\,7500 + 0{,}5\,ln\,9500 = 9{,}041 \text{ ют.}$$

Если вычислить полезность ЛПР после первого проигрыша

$$U_0 = ln\,8000 = 8{,}987 \text{ ют.},$$

то можно сделать вывод о том, что ЛПР может играть и во второй раз, если полностью застрахует свой риск.

Задачи для самостоятельного решения. Задан закон распределения вероятностей дискретной случайной величины. Найти числовые характеристики.

№ 1.

X	19	21	22	24
p	0,1	0,2	0,3	0,4

№ 2.

X	7	10	12	14
p	0,3	0,2	0,4	0,1