Задание

1. Повторить теоретический материал, решить задачи для самостоятельного решения.

2. Фотоотчет присылать на электронную почту

С уважением, Хвастова Светлана Ивановна

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721389311.

Электронная почта: xvsviv@rambler.ru

Практическая работа на тему:
«Интервальные оценки неизвестных параметров распределения»

Теоретические сведения

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала, покрывающего оцениваемый параметр.

Доверительным называют интервал, который с заданной надёжностью **γ** покрывает неизвестный параметр.

1. Для оценки с надёжностью **γ** математического ожидания **a** нормально распределённого признака **X** генеральной совокупности по выборочной средней $\overline{x_в}$ при известном генеральном среднем квадратическом отклонении δ служит доверительный интервал

$$\overline{x_в} - \frac{t\delta}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_в} + \frac{t\delta}{\sqrt{n}}, \qquad \textbf{(1)}$$

где $\frac{t\delta}{\sqrt{n}} = \varepsilon$ - точность оценки; n – объём выборки; t – значение аргумента функции Лапласа $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$ *при котором* $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$.

<u>Пример 1.</u> Найти доверительный интервал для оценки с надёжностью γ=0,99 неизвестного математического ожидания нормального распределения **X** генеральной совокупности, если известны генеральное среднее квадратическое отклонение δ=2, выборочная средняя $\overline{x_в}$=15,35 и объём выборки n=16.

Решение. Требуется найти доверительный интервал (1). Все величины, кроме t, известны. Найдём t из соотношения $\Phi(t)=\frac{0{,}99}{2}=0{,}495$. По таблице значений функции Лапласа находим t=2,58. Подставив t=2,58; $\overline{x_в}$=15,35; δ=2; n=16 в (9), получим искомый доверительный интервал 14,06<**a**<16,64.

Пример 2. Найти минимальный объём выборки, при котором с надёжностью 0,95 точность оценки математического ожидания **a** нормального распределения признака **X** генеральной совокупности по выборочной средней ε=0,2, если известно среднее квадратическое отклонение признака **X** δ=1,3.

Решение. Точность оценки (с надёжностью **γ**) математического ожидания a нормального распределения признака X по выборочной средней определяется по формуле $\varepsilon=\frac{t\delta}{\sqrt{n}}$. Отсюда находим, что $n=\frac{t^2\delta^2}{\varepsilon^2}$. По условию задачи **γ**=0,95; следовательно $\Phi(t)=\frac{0{,}95}{2}=0{,}475$. По таблице значений функции Лапласа находим t=1,96. Подставив t=1,96; δ=1,3 и ε=0,2 в данную формулу, получим искомый объём выборки n=163.

2. Если среднее квадратическое отклонение δ нормально распределённого признака **X** генеральной совокупности неизвестно, то для оценки (с надёжностью **γ**) математического ожидания a признака **X** служит доверительный интервал

$$\overline{x_в}-t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}}<a<\overline{x_в}+t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}}, \qquad \textbf{(2)}$$

где S – исправленное среднее квадратическое отклонение; n – объём выборки; t_γ - находят по таблице значений $t_\gamma=t(\gamma,n)$ по заданным **γ** и **n** [Гмурман, прил.3].

Замечание. Для нахождения доверительного интервала (2) используют тот факт, что случайная величина $T=\frac{\bar{x}-a}{S/\sqrt{n}}$, где $\bar{x}$ - выборочная средняя; S – исправленное среднее квадратическое отклонение, имеет распределение

Стьюдента. При неограниченном возрастании объёма выборки n распределение Стьюдента стремится к нормальному. Поэтому при достаточно больших n можно вместо распределения Стьюдента пользоваться нормальным распределением.

<u>Пример 3.</u> Найти доверительный интервал для оценки с надёжностью **γ**=0,99 неизвестного математического ожидания **a** нормального распределённого признака **X** генеральной совокупности, если известны выборочная средняя $\overline{x_в}$=48,5; исправленное среднее квадратическое отклонение S=4,0 и объём выборки n=16.

<u>Решение.</u> Требуется найти доверительный интервал (2). Все величины, кроме t_γ, известны. По таблице значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$ по **γ**=0,99 и n=16 находим t_γ=2,95. Поставив $\overline{x_в}$=48,5; S=4,0; n=16; t_γ=2,95 в формулу (2), получим искомый доверительный интервал: 45,55<a<51.45.

3. Интервальной оценкой с надёжностью **γ** среднего квадратического отклонения δ нормально распределённого признака X генеральной совокупности по исправленному среднему квадратическому отклонению S служит доверительный интервал

$$\begin{aligned} &S(1-q) < \delta < S(1+q) && \text{(при } q<1\text{)}; \\ &0 < \delta < S(1+q) && \text{(при } q>1\text{)}. \end{aligned} \qquad \textbf{(3)}$$

где q находят по таблице значений q=q(**γ**,n) [Гиурман, прил.3].

<u>Пример 4.</u> Произведено n=20 измерений одним прибором (без систематических ошибок) некоторой физической величины, причём исправленное среднее квадратическое отклонение S случайных ошибок измерений оказалось равным 0,7. Найти точность прибора с надёжностью 0,95. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

<u>Решение.</u> Точность прибора характеризуется средним квадратическим отклонением случайных ошибок измерений. Поэтому задача сводится к отысканию доверительного интервала, покрывающего δ с заданной

надёжностью γ=0,95. По данным γ=0,95 иn=20 по таблице значений q=q(γ,n) найдём q=0,37. Так как q<1, то доверительный интервал имеет вид

$$S\,(1-q)<\delta<S\,(1+q).$$

Подставив S=0,7; q=0,37 в это соотношение, получим искомый доверительный интервал $0{,}441<\delta<0{,}959$.

Задачи для самостоятельного решения

<u>Задача 1.</u> Найти доверительный интервал для оценки с надёжностью γ неизвестного математического ожидания **а** нормально распределённого признака **X** генеральной совокупности, если известны генеральное среднее квадратическое отклонение δ, выборочная средняя $\overline{x_в}$ и объём выборки n.

1.	$\delta=3$	$\overline{x_в}=10{,}2$	n=36	γ=0,95
2.	$\delta=4$	$\overline{x_в}=11{,}4$	n=64	γ=0,99
3.	$\delta=4$	$\overline{x_в}=15{,}6$	n=100	γ=0,99
4.	$\delta=5$	$\overline{x_в}=13{,}2$	n=64	γ=0,95
5.	$\delta=5$	$\overline{x_в}=11{,}0$	n=144	γ=0,999
6.	$\delta=2$	$\overline{x_в}=18{,}2$	n=36	γ=0,95
7.	$\delta=3{,}5$	$\overline{x_в}=12{,}4$	n=64	γ=0,99
8.	$\delta=3$	$\overline{x_в}=11{,}6$	n=81	γ=0,999
9.	$\delta=4{,}5$	$\overline{x_в}=19{,}4$	n=100	γ=0,95
10.	$\delta=6$	$\overline{x_в}=18{,}6$	n=81	γ=0,95
11.	$\delta=5$	$\overline{x_в}=17{,}7$	n=100	γ=0,99
12.	$\delta=3$	$\overline{x_в}=24{,}6$	n=81	γ=0,95

13.	δ =2,5	$\overline{x_в}$ =14,4	n=100	γ=0,999
14.	δ =4	$\overline{x_в}$ =20,3	n=64	γ=0,99
15.	δ =4	$\overline{x_в}$ =15,8	n=64	γ=0,95

<u>Задача 2.</u> Найти минимальный объём выборки, при котором с надёжностью **γ** точность оценки математического ожидания **a** нормально распределённого признака **X** генеральной совокупности по выборочной средней равна ε, если известно среднее квадратическое отклонение δ признака X.

1.	δ =2,0	ε =0,4	γ=0,975
2.	δ =2,5	ε =0,5	γ=0,925
3.	δ =1,5	ε =0,3	γ=0,95
4.	δ =2,5	ε =0,4	γ=0,975
5.	δ =1,3	ε =0,3	γ=0,99
6.	δ =2,2	ε =0,3	γ=0,925
7.	δ =1,8	ε =0,4	γ=0,999
8.	δ =1,7	ε =0,2	γ=0,95
9.	δ =1,5	ε =0,3	γ=0,989
10.	δ =1,1	ε =0,25	γ=0,999
11.	δ =1,2	ε =0,3	γ=0,999
12.	δ =1,6	ε =0,25	γ=0,925
13.	δ =2,1	ε =0,4	γ=0,95
14.	δ =2,3	ε =0,3	γ=0,975
15.	δ =1,4	ε =0,25	γ=0,99

<u>Задача 3.</u> Найти доверительный интервал для оценки с надёжностью **γ** неизвестного математического ожидания **a** нормально распределённого

признака **X** генеральной совокупности, если известны выборочная средняя $\overline{x_в}$, исправленное среднее квадратическое отклонение S и объём выборки n.

1.	n=9	$\overline{x_в}$ =35,3	S=4,5	γ=0,95
2.	n=16	$\overline{x_в}$ =98,7	S=4	γ=0,999
3.	n=12	$\overline{x_в}$ =74,6	S=5	γ=0,99
4.	n=25	$\overline{x_в}$ =57,3	S=5	γ=0,999
5.	n=18	$\overline{x_в}$ =132,2	S=8	γ=0,99
6.	n=16	$\overline{x_в}$ =84,8	S=6,4	γ=0,95
7.	n=30	$\overline{x_в}$ =117,5	S=5,5	γ=0,999
8.	n=16	$\overline{x_в}$ =89,1	S=6	γ=0,99
9.	n=10	$\overline{x_в}$ =49,9	S=3	γ=0,95
10.	n=18	$\overline{x_в}$ =67,5	S=4	γ=0,999
11.	n=15	$\overline{x_в}$ =103,7	S=4,5	γ=0,99
12.	n=16	$\overline{x_в}$ =78,3	S=5	γ=0,95
13.	n=12	$\overline{x_в}$ =91,6	S=3,5	γ=0,99
14.	n=25	$\overline{x_в}$ =132,2	S=6	γ=0,999
15.	n=12	$\overline{x_в}$ =59,4	S=4	γ=0,95

<u>Задача 8.</u> По данным выборки объёма n из генеральной совокупности нормально распределённого признака X найдено исправленное среднее квадратическое отклонение S. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение δ с надёжностью **γ**.

8.1.	n=20	S=0,5	γ=0,999
8.2.	n=10	S=1,5	γ=0,99
8.3.	n=6	S=4,5	γ=0,95
8.4.	n=30	S=0,8	γ=0,999
8.5.	n=9	S=2,4	γ=0,99
8.6.	n=12	S=2,3	γ=0,95
8.7.	n=25	S=0,7	γ=0,999
8.8.	n=18	S=0,6	γ=0,99
8.9.	n=15	S=1,3	γ=0,95
8.10.	n=35	S=0,9	γ=0,999
8.11.	n=20	S=1,8	γ=0,99
8.12.	n=16	S=0,7	γ=0,95
8.13.	n=40	S=1,0	γ=0,999
8.14.	n=25	S=2,1	γ=0,99

8.15. $n=18$ $S=1,5$ $\gamma=0,95$