Уважаемые студенты!

Вам необходимо изучить и кратко законспектировать материал лекции, ответить на контрольные вопросы, выполнить самостоятельную работу.

Электронная почта: ***hvastov@rambler.ru***

Лекция

Дифференциальные уравнения I порядка, его общее и частное решение. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

План.

1.Основные понятия дифференциального уравнения.
2. Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.
3. Примеры решения уравнений с разделяющимися переменными.

1.Основные понятия дифференциального уравнения.

Определение 1. Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную, функцию и ее производную.

Дифференциальное уравнение называется **обыкновенным** в случае, когда неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, зависит только от одной независимой переменной.

Определение 2. Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной, входящей в уравнение.

Обыкновенное дифференциальное уравнение порядка n имеет вид: $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$. (1)

В этом уравнении x – независимая переменная, y – неизвестная функция, а $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ – производные неизвестной функции.

Определение 3. Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$f(x, y, y') = 0, \qquad (2)$$

а если его удастся решить относительно производной, то оно запишется так: $y' = F(x, y)$. (3)

Определение 4. Решением, или **интегралом уравнения** (2) называется всякая дифференцируемая функция $y=\varphi(x)$, удовлетворяющая этому уравнению, т. е. такая, после подстановки которой в уравнение (2) оно обращается в тождество, т. е. $\varphi'(x)=F[x,\varphi(x)]$.

Определение 5. Общим решением дифференциального уравнения (2) называются соотношения вида $\Phi(x,y,C)=0,$ или $\Phi(x,y)=C$, (4)

включающие одну произвольную постоянную величину и обладающие тем свойством, что решая их относительно *y* при любых частных значениях произвольной постоянной, получаем функции вида $y=\varphi(x)$, являющиеся решениями уравнения (2) или (3).

Определение 7. Частным решением дифференциального уравнения (2) называется такое решение, которое получается из общего решения (4) при некотором частном значении произвольной постоянной. Произвольная постоянная *C*, входящая в (4), определяется из так называемых **начальных условий**.

Определение 8. Задача отыскания решения уравнения (2), удовлетворяющего начальным условиям

$y=y_0$ при $x=x_0$, называется **задачей Коши**.

2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка, приводящееся при помощи тождественных преобразований к виду $f_1(x)g_1(y)dy+f_2(x)g_2(y)dx=0$, называется уравнением с **разделяющимися переменными**.

Разделив почленно уравнение на произведение $g_1(y)f_2(x)$, приходим к уравнению

$$\frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy+\frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx=0.$$

Отношение $\frac{g_1(y)}{g_2(y)}$ есть функция одной переменной *y*, а отношение $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$ функция одной переменной *x*. Следовательно, мы получили уравнение с разделенными переменными. Проинтегрировав почленно это уравнение, получим его общий интеграл:

$$\int P(x)dx+\int Q(y)dy=C.$$

Пример 1. Решить уравнение $(y+xy)dx+(x-xy)dy=0$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения: $y(1+x)dx+x(1-y)dy=0$.

Делим обе части уравнения на $xy\neq 0$: $\frac{1+x}{x}dx+\frac{1-y}{y}dy=0$.

Решением его является общий интеграл $x+\ln|x|+\ln|y|-y=c$, т.е. $\ln|xy|+x-y=c$.

Пример 2. Решить уравнение $y'=-\frac{y}{x}$, удовлетворяющее условию $y(4)=1$.

Решение. Имеем: $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$ или $\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$. Проинтегрировав, получим: $\ln y=\ln c-\ln x$,

т. е. $y=\frac{c}{x}$ – общее решение ДУ. Подставим $x=4$ и $y=1$ в общее решение уравнения: $1=\frac{c}{4}$, $c=4$ Получаем: $y=\frac{4}{x}$ – частное решение уравнения $y'=-\frac{y}{x}$.

Эти уравнения самые простые. При решении какого-либо уравнения его стараются свести к уравнению с разделяющимися переменными.

<u>А. Уравнение с разделенными переменными</u>

Уравнением с разделенными переменными называется уравнение вида:

$$S(y)dy=P(x)dx \qquad (1)$$

Переменные разделены, каждая из них находится только в той части равенства, где ее дифференциал. $S(y)$ и $P(x)$ – заданные функции.

<u>Теорема</u>. Общим интегралом уравнения (1) служит соотношение

$$\int S(y)dy=\int P(x)dx+C. \qquad (2)$$

<u>Пример.</u> Найти общий интеграл уравнения $(1+y)dy=x^2dx$.

<u>Решение.</u> $\int(1+y)dy=\int x^2dx+C$ или $y+\frac{y^2}{2}=\frac{x^3}{3}+C$ – общий интеграл.

<u>Теорема.</u> Частным решением уравнения (1), удовлетворяющим начальному условию $y|_{x=x_0}=y_0$ будет функция $y(x)$, определенная из равенства

$$\int_{y_0}^{y} S(u)du=\int_{x_0}^{x} P(t)dt. \qquad (4)$$

<u>Пример.</u> Найти решение уравнения $\frac{1}{y}dy=2x\,dx$, удовлетворяющего условию $y|_{x=0}=3$

Решение. $\int_3^y \frac{1}{u}\,du = \int_0^x 2t\,dt \Rightarrow \ln\frac{y}{3} = x^2 \Rightarrow y = 3e^{x^2}$.

В. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида: $P(x)\,Q(y)\,dx + R(x)\,S(y)\,dy = 0$

(5)

В этом уравнении легко разделить переменные. Для этого поделим уравнение на произведение $R(x)\,Q(y) \not\equiv 0$. Тогда получим: $\frac{P(x)}{R(x)}dx + \frac{S(y)}{Q(y)}dy = 0$. (6)

Это уравнение с разделенными переменными. При переходе от уравнения (5) к уравнению (6) мы могли потерять некоторые решения, которые обращают в нуль произведение $R(x)\,Q(y)$, именно $R(x)\cdot Q(y) \equiv 0$ или $Q(y) = 0$. (7)

Уравнение (7) есть конечное (без производных) уравнение относительно y. Его решением служат $y_1 = 0_1 = const$, $y_2 = 0_2 = const$, … и т.д. Заметим, что константы $y_k = a_k$ служат решениями уравнения (5), т.к. $Q(a_k) = 0$ и $da_k = 0$.

Общим интегралом (5) будет $\int \frac{P(x)}{R(x)}dx + \int \frac{S(y)}{Q(y)}dy = C$. (8)

Если решения $y_k = a_k$ получаются из (8) при подходящем выборе *C*, то такие решения суть частные, если же подобрать нужное *C* невозможно, то они особые решения.

Следовательно, если у уравнения (5) есть особые решения, то соответствующие им графики, т.е. интегральные кривые – это прямые параллельные оси OX.

Частным решением уравнения (5), удовлетворяющим начальному условию $y\big|_{x=y_0} = y_0$ будет функция $y(x)$, определенная уравнением:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{P(t)}{R(t)}dt + \int_{y_0}^{y} \frac{S(u)}{Q(u)}du = 0.$$

(9)

<u>Пример</u>. Для уравнения $x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$ найти общий интеграл и частное решение, удовлетворяющее условию $y\big|_{x=-1} = 0$.

<u>Решение.</u>

а) <u>Общий интеграл.</u> Делим на $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \neq 0$.

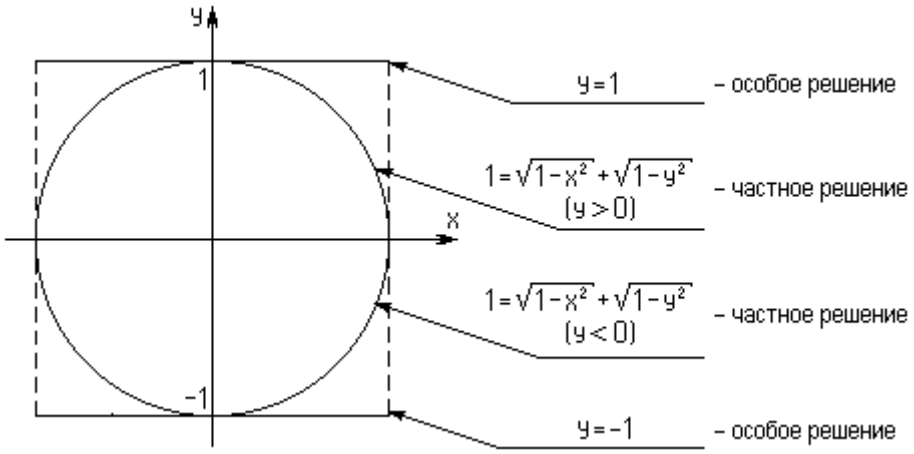
$$\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0.$$

Отсюда $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}} = C$ или $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = C \Rightarrow$ – общий интеграл.

б) <u>Частное решение.</u> $\sqrt{1-(-1)^2} + \sqrt{1-0^2} = C \Rightarrow C = 1$

Частное решение: $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 1$.

с) <u>Особое решение.</u> $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 0,\ -1 \le x \le 1,\ \ y = \pm 1$



Возможна потеря решений $y_1 = 1,\ y_2 = -1$. Оба эти решения особые.

Упражнения для самостоятельной работы.

Найти общее решение или общий интеграл дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными:

1) $xydx + (x+1)dy = 0$; 2) $(y^2+1)dx - xydy = 0$;

3) $(x+1)dy - (y-2)dx = 0$; 4) $(1+y^2)dx - (1+x^2)dy = 0$;

5) $\sqrt{1-y^2}\,dx - \sqrt{1-x^2}\,dy = 0$; 6) $(1+y)dx + (1+x)dy = 0$;

7) $\cos^2 y \cdot dx + \operatorname{ctg} x \cdot dy = 0$.

Контрольные вопросы.

1.Какое уравнение называется дифференциальным?

2.Что называется порядком дифференциального уравнения?

3.Что называется решением, общим решением дифференциального уравнения?

4. Дайте определение частного решения дифференциального уравнения.

5.Что называется задачей Коши?

6. Какое уравнение называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными?

7.Как решается дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными?