Уважаемые студенты!

Вам необходимо изучить и кратко законспектировать материал лекции, ответить на контрольные вопросы, решить уравнения. Ответ присылать на электронную почту до 28. 05. 2022 г.

Электронная почта: ***hvastov@rambler.ru***

Лекция

Линейные дифференциальные уравнения I порядка.

План

1. Понятие линейного уравнения первого порядка
2. Решение уравнений первого порядка
3. Примеры решений линейных уравнений первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производной:

$$y' + p(x)y = g(x),$$

Если $g(x) \equiv 0$, то уравнение называют *однородным*; в противном случае его называют *неоднородным*.

Линейные однородные уравнения допускают разделение переменных:

$$y' = -p(x)y,\ \frac{dy}{y} = -p(x)dx,\ y = C\exp\left(-\int p(x)dx\right),$$

где $\int p(x)dx$ – какая-либо первообразная функции $p(x)$.

Линейные неоднородные уравнения обычно интегрируются *методом Бернулли*. Решение ищется в виде

$$y = uv,$$

тогда

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}, \qquad v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} + p(x)uv = g(x),$$

$$v\frac{du}{dx} + u\left(\frac{dv}{dx} + p(x)v\right) = g(x).$$

Функцию $v(x)$ можно выбрать так, чтобы сумма в скобках обратилась в ноль:

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0,\ \frac{dv}{v} = -p(x)dx,\ \ln|v| - \ln|C_1| = -\int pdx,\ v = C_1\exp\left(-\int pdx\right).$$

Постоянная C_1 может иметь любое отличное от нуля значение; полагая $C_1=1$, получим

$$v = \exp\left(-\int p dx\right).$$

Исходное уравнение примет вид

$$\frac{du}{dx}\exp\left(-\int p dx\right) = g(x).$$

Разделяя в нем переменные, интегрируя и возвращаясь к исходной переменной, найдем решение.

Пример. $y' - y = e^x$. Пусть $y = uv$, тогда

$$u'v + uv' - uv = e^x,\ u'v + u(v' - v) = e^x.$$

Пусть функция $v(x)$ такова, что сумма в скобках обращается в ноль. Одним из решений уравнения $v' - v = 0$ является функция $v = e^x$. Подставляя ее в уравнение $u'v = e^x$, получим

$$u'e^x = e^x,\ du = dx,\ u = x + C.$$

Окончательно:

$$y = (x + C)e^x.$$

Решение неоднородного уравнения можно выполнить иначе – используя *метод вариации постоянной*. Пусть общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y_0 = C\exp\left(-\int p(x)dx\right).$$

Далее следует, считая C неизвестной функцией от x, подставить это решение в исходное неоднородное уравнение.

Для приведенного примера: $y' = e^x$, $y_0 = Ce^x$. Полагая $C = f(x)$ и подставляя функцию $y_0 = f(x)e^x$ в исходное уравнение, получим

$$\frac{df}{dx}e^x + fe^x - fe^x = e^x,\ df = dx,\ f = x + C,\ y = (x + C)e^x.$$

Определение Дифференциальное уравнение первого порядка называется ***линейным***, если оно имеет вид

$$y' + f(x)y = g(x),$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции (непрерывные) переменной x. В случае, когда функция $g(x)$ тождественно равна нулю, уравнение называется ***однородным***, в противном случае — ***неоднородным***.

Рассмотрим один из способов его решения — метод Бернулли.

Решение ищем в виде произведения двух функций $y = uv$, одна из которых может быть выбрана произвольно, а другая должна определяться из уравнения. Так как $y' = u'v + uv'$, то

$$u'v + uv' + f(x)uv = g(x),$$

$$u'v + u(v' + f(x)v) = g(x).$$

Выберем $v(x)$ так, чтобы скобка при функции u равнялась нулю. Таким образом, решение уравнения свелось к решению системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dx} + f(x)v = 0, \\ u'v = g(x). \end{cases}$$

Из первого уравнения находим какое–либо частное решение $v = v(x)$ (постоянная C берется равной 0**).** Подставляя его значение во второе уравнение системы, находим $u(x)$.

Определение. Линейным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно искомой функции и ее производной. Общий вид линейного д.у.1: $y' + p(x) \cdot y = q(x)$, где $p(x)$ и $q(x)$ – непрерывные функции или постоянные. Если $q(x) = 0$, то уравнение $y' + p(x) \cdot y = 0$ решается как дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Рассмотрим уравнения:

1) $y' - x^2 \cdot y - x^2 = 0.$ Это уравнение является линейным по определению

$y' - x^2 \cdot y = x^2$, но лучше рассматривать его как уравнение с разделяющимися переменными:

$y' = x^2 + x^2 \cdot y;$ $\qquad y' = x^2 \cdot (1 + y).$

2) $y' - y^3 = 4x.$ Это уравнение не является линейным, т. к. функция y в уравнении имеет не первую степень, а выше

3) $y' = \dfrac{2x + 3y}{x};$ $\qquad y' = 2 + \dfrac{3}{x}y;$ $\qquad y' - \dfrac{3}{x}y = 2.$

Уравнение является линейным по определению. Но проще рассматривать его как однородное д.у.1: $y' = \dfrac{2x + 3y}{x}$, где $f(x, y) = \dfrac{2x + 3y}{x}$ – однородная функция нулевого измерения.

4) $\dfrac{dy}{dx} = y + x.$ Запишем уравнение в виде $y' - y = x$. Это линейное д.у.1.

Решение линейного дифференциального уравнения первого порядка

Общее решение ищется в виде $y = u \cdot v$, где $u = u(x), v = v(x)$ – некоторые функции.

Покажем на примере, что любую функцию $y = f(x)$ можно представить в виде произведения двух функций, одна из которых выбирается произвольно, а вторая зависит от этого выбора.

Пусть $y = \sin x$. Можно $\sin x$ представить в виде различных пар множителей:

$\sin x = \operatorname{tg} x \cdot \cos x;$

$\sin x = \sin^3 x \cdot \dfrac{1}{\sin^2 x} = \sin^3 x \cdot \left(1 + \operatorname{ctg}^2 x\right).$

$\sin x = 2\sin\dfrac{x}{2} \cdot \cos\dfrac{x}{2}$, где первый множитель выбирается произвольно.

Указанная подстановка $y = u \cdot v$ приводит линейное д.у.1 к решению двух д.у. с разделяющимися переменными. Покажем это в общем виде. В линейное уравнение $y' + p(x) \cdot y = g(x)$ подставим $y = u \cdot v$; $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Получим

$$u' \cdot v + u \cdot v' + p(x) \cdot uv = g(x)$$

или

$$v \cdot (u' + p(x) \cdot u) + u \cdot v' = g(x). \qquad (4)$$

Выберем функцию u такой, чтобы

$$u' + p(x) \cdot u = 0. \qquad (5)$$

Уравнение (5) – дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$\dfrac{du}{dx} = -p(x) \cdot u;$ $\dfrac{du}{u} = -p(x) \cdot dx.$ Интегрируя, найдем функцию $u = u(x)$ без

учета произвольной постоянной. Подставим найденную функцию $u(x)$ в уравнение (4) и получим $u(x) \cdot v' = g(x)$ – дифференциальное уравнение с

разделяющимися переменными (3). Его общее решение позволит получить второй множитель

$v = v(x,\ c)$. Тогда $y = u(x)\cdot v(x,\ c)$ – общее решение линейного д. у. 1.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin\ x}{x}$.

Решаем подстановкой

$y = u\cdot v;\quad y' = u'v + u\cdot v'.$

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}u\cdot v = \frac{\sin\ x}{x}.$$

$$v\cdot\left(u' + \frac{1}{x}u\right) + u\cdot v' = \frac{\sin\ x}{x}. \qquad (6)$$

$$u' + \frac{1}{x}u = 0$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x}\cdot u$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{dx}{x}$$

$$\ln u = -\ln x.$$

$u = \frac{1}{x}$ подставим в (6).

$$u\cdot v' = \frac{\sin\ x}{x}$$

$$\frac{1}{x}\cdot v' = \frac{\sin\ x}{x}$$

$$v' = \sin\ x$$

$$v = -\cos x + c$$

Общее решение: $y = \frac{1}{x}\cdot(-\cos\ x + c)$.

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения

$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}\cdot y = (x+1)^3$ при $y(0) = 3$.

Подстановка: $y = u\cdot v$.

$$\frac{dy}{dx} = y' = u'v + uv';$$

$$u'\cdot v + u\cdot v' - \frac{2}{x+1}\cdot uv = (x+1)^3$$

$$v\cdot\left(u' - \frac{2}{x+1}\cdot u\right) + u\cdot v' = (x+1)^3 \qquad (7)$$

$$u' - \frac{2}{x+1}\cdot u = 0, \qquad \frac{du}{u} = \frac{2dx}{x+1}, \qquad \int\frac{du}{u} = \int\frac{2dx}{x+1},$$

$$\ln|u| = 2\ln|x+1|, \qquad u = (x+1)^2.$$

Подставим найденную функцию u в уравнение (7): $u \cdot v' = (x+1)^3$;

$$(x+1)^2 \cdot v' = (x+1)^3.$$

$$v' = x+1; \qquad \frac{dv}{dx} = x+1, \qquad dv = (x+1)\,dx,$$

$$v = \int (x+1)\,dx = \frac{(x+1)^2}{2} + c.$$

Таким образом, общее решение данного уравнения будет иметь вид

$$y = (x+1)^2 \cdot \left(\frac{(x+1)^2}{2} + c \right)$$

или $\quad y = \dfrac{(x+1)^4}{2} + c \cdot (x+1)^2.$

Найдем частное решение дифференциального решения, удовлетворяющее начальному условию $y = 3$ при $x = 0$.

$$3 = \frac{(0+1)^4}{2} + c \cdot (0+1)^2; \qquad c = 5/2.$$

Следовательно, искомое частное решение такое:

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + \frac{5}{2} \cdot (x+1)^2.$$

Пример Решить уравнение $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^x$.

Решение. Ищем решение данного уравнения в виде произведения двух функций: $y = uv, \quad y' = u'v + uv'$.

Имеем

$$x(u'v + uv') + (x+1)uv = 3x^2 e^x$$

или

$$xu'v + xuv' + (x+1)uv = 3x^2 e^x,$$

$$xu'v + (xv' + (x+1)v)u = 3x^2 e^x.$$

Выберем функции $u(x)$ и $v(x)$ так, чтобы

$$\begin{cases} xv' + (x+1)v = 0, \\ xu'v = 3x^2 e^x. \end{cases}$$

Решив полученные уравнения, найдем $v(x)$ и $u(x)$.

Решаем первое уравнение. Разделим переменные:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{x+1}{x}dx,$$

$$\frac{dv}{v} = \left(-1 - \frac{1}{x}\right)dx.$$

Почленно проинтегрируем:

$$\int \frac{dv}{v} = \int \left(-1 - \frac{1}{x}\right)dx \Rightarrow \ln|v| = -x - \ln|x|.$$

Отсюда $v = e^{-x-\ln|x|} = e^{-x} \cdot e^{\ln|x|^{-1}} = e^{-x}\frac{1}{x}$. Здесь при интегрировании положили $C = 0$, так как $v(x)$ — произвольно.

Найдем $u(x)$:

$$u'(x)e^{-x}\frac{1}{x} = 3xe^{-x}$$

или $u'(x) = 3x^2$, откуда

$$u(x) = x^3 + C.$$

Окончательно имеем:

$$y = u(x)v(x) = x^2 e^{-x} + \frac{C}{x}e^{-x}.$$

Ответ: $y = x^2 e^{-x} + \frac{C}{x}e^{-x}$.

Контрольные вопросы:

1. Какие уравнения называются линейными уравнениями первого порядка?

2. Как решить линейное дифференциальное уравнение первого порядка?

3. Решить уравнения

$$y' - y = e^x$$

$$xy' - y = -x$$

4. Найти частное решение дифференциального уравнения

$xy' + y = 3$ *(если y =0, x=1)*