Уважаемые студенты!

Вам необходимо повторить теоретический материал, рассмотреть решение примеров, выполнить самостоятельную работу.

Фотоотчет практической работы предоставить на электронную почту hvastov@rambler.ru, при возникновении вопросов обращаться по телефону 0721098278 (WatsApp).

Практическое занятие

Вычисление определенного интеграла методом подстановки.

Цель: научиться вычислять определенный интеграл методом подстановки и методом интегрирования по частям.

Определенный интеграл вычисляется по **формуле Ньютона-Лейбница:**

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_a^b = \text{F(a)-F(b)}$$

(a и b - соответственно верхний и нижний пределы интегрирования, они пишутся и читаются снизу вверх, а в формулу подставляются сверху вниз!)

Основные свойства определенного интеграла:

1. При перестановке пределов интегрирования изменяется знак интеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

2. Отрезок интегрирования можно разбивать на части:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

3. Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их определенных интегралов.

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

Пример 1.

$$\int_2^3 3x^2\,dx = x^3|_2^3 = 3^3 - 2^3 = 27-8=19.$$

Вычисления определённого интеграла методом введения новой переменной.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t(a)}^{t(b)} u(t)\,dt$$

Пример 2.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^3 \sin x\,dx = \left| \begin{matrix} t=\cos x \\ dt=t'dx=\cos' x\,dx=-\sin x\,dx \\ t_{\text{верхнее}}=\cos\frac{\pi}{2}=0 \\ t_{\text{нижнее}}=\cos 0=1 \end{matrix} \right| = -\int_1^0 t^3\,dt = -\frac{t^4}{4}\Big|_1^0 = \frac{t^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{1}{4}$

Пример 3.

$\int_0^1 \frac{3x dx}{4-x^2} = \left\| \begin{matrix} t=4-x^2 \\ dt=(4-x^2)'\,dx=-2x\,dx \\ t_{\text{верхнее}} = 4-1=3 \\ t_{\text{нижнее}} = 4-0=4 \end{matrix} \right| = -\frac{3}{2}\int_4^3 \frac{dt}{t} = -\frac{3}{2}\ln t\Big|_4^3 = -\frac{3}{2}(\ln 3 - \ln 4) = -\frac{3}{2}\ln\frac{3}{4}$

Вычисление определенного интеграла по частям:

Используем формулу:

$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$

Пример 4.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1)\cos x\,dx = \left| \begin{matrix} u=(x-1) & du=u'\,dx=(x-1)'\,dx=dx \\ dv=\cos x\,dx; & v=\int dv=\int \cos x\,dx=\sin x \end{matrix} \right| = (x-1)\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = (x-1)\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\sin\frac{\pi}{2} - (0-1)\sin 0\right) + \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2}-1-1=\frac{\pi}{2}-2;$

Пример 5.

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{6x}{\sin^2 x} dx = \left| \begin{matrix} u=6x; & du=u' dx=6x' dx=6dx \\ dv=\frac{dx}{\sin^2 x}; & v=\int dv=\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x \end{matrix} \right|$ $=-6x\operatorname{ctg}x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x\, dx$ $=-6\cdot\frac{\pi}{2} ctg\frac{\pi}{2}-6\cdot\frac{\pi}{6} ctg\frac{\pi}{6}+\ln|\sin x|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\pi\sqrt{3}+\ln|\sin\frac{\pi}{2}|-\ln|\sin\frac{\pi}{6}|=\pi\sqrt{3}+\ln 1-\ln\frac{1}{2}=\pi\sqrt{3}+0+\ln 2=\pi\sqrt{3}+\ln 2$

Выполните самостоятельную работу:

Вариант 1	Вариант 2
1. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{2+x^3}$ 2. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1+tgx}}{cos^2 x} dx$ 3. $\int_1^2 \frac{2^x dx}{1-2^x}$	1. $\int_1^e \frac{sinlnx}{5x} dx$ 2. $\int_1^2 \frac{2^x dx}{1+4^x}$ 3. $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{sinx\pi} cos\pi x dx$
Вариант 3	Вариант 4
1. $\int_{-1}^2 (3x^2+4x-1)\, dx$ 2. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{3+ctgx}}{sin^2 x} dx$ 3. $\int_{-1}^0 (2x+3)e^{-x}\, dx$	1. $\int_{-1}^2 (3x^2+4x-1)\, dx$ 2. $\int_{-1}^0 \frac{x^2}{1-4x^3} dx$ 3. $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (2-x) \sin 3x\, dx$