Уважаемые студенты!

Вам необходимо изучить и кратко законспектировать материал лекции, ответить на контрольные вопросы.
Ответ присылать на электронную почту до 05. 06
Электронная почта: hvastov@rambler.ru

Лекция

Дифференциальные уравнения II порядка, его общее и частное решение. Задача Коши.

План

1. Понятие дифференциального уравнения второго порядка
2. Основные виды уравнения второго порядка
3. Решение примера

В общем случае дифференциальное уравнение второго порядка можно записать в виде

$$F(x, y, y', y'') = 0,$$

где F – заданная функция указанных аргументов.

Если дифференциальное уравнение можно разрешить относительно второй производной y'', то его можно представить в следующем явном виде:

$$y'' = f(x, y, y').$$

В частных случаях функция f в правой части может содержать лишь одну или две переменных. Такие *неполные уравнения* включают в себя 5 различных типов:

$$y'' = f(x), \quad y'' = f(y), \quad y'' = f(y'), \quad y'' = f(x, y'), \quad y'' = f(y, y').$$

С помощью определенных подстановок эти уравнения можно преобразовать в уравнения первого порядка.

В случае произвольных дифференциальных уравнений второго порядка, их порядок можно понизить, если эти уравнения обладают определенной симметрией. Ниже мы обсудим 2 типа таких уравнений (случаи 6 и 7):

- Функция $F(x, y, y', y'')$ является однородной функцией аргументов y, y', y'';
- Функция $F(x, y, y', y'')$ является точной производной функции первого порядка $\Phi(x, y, y')$.

Итак, рассмотрим указанные случаи понижения порядка более подробно.

Случай 1. Уравнение вида $y''= f(x)$

Если дано уравнение $y'' = f(x)$, то его порядок можно понизить введением новой функции $p(x)$, такой, что $y' = p(x)$. В результате мы получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$p' = f(x).$$

Решая его, находим функцию $p(x)$. Затем решаем второе уравнение

$$y' = p(x)$$

и получаем общее решение исходного уравнения.

Случай 2. Уравнение вида $y''= f(y)$

Здесь правая часть уравнения зависит только от переменной y. Вводим новую функцию $p(y)$, полагая $y' = p(y)$. Тогда можно записать:

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p,$$

и уравнение принимает вид:

$$\frac{dp}{dy}p = f(y).$$

Решая его, находим функцию $p(y)$. Затем находим решение уравнения $y' = p(y)$, то есть функцию $y(x)$.

Случай 3. Уравнение вида $y''= f(y')$

В данном случае для понижения порядка вводим функцию $y' = p(x)$ и получаем уравнение

$$y'' = p' = \frac{dp}{dx} = f(p),$$

которое является уравнением первого порядка с разделяющимися переменными p и x. Интегрируя, находим функцию $p(x)$ и затем функцию $y(x)$.

Случай 4. Уравнение вида $y''= f(x,y')$

Используем подстановку $y' = p(x)$, где $p(x)$ − новая неизвестная функция, и получаем уравнение первого порядка

$$p' = \frac{dp}{dx} = f(x, p).$$

Интегрируя, определяем функцию $p(x)$. Далее решаем еще одно уравнение 1-го порядка

$$y' = p(x)$$

и находим общее решение $y(x)$.

Случай 5. Уравнение вида $y''= f(y,y')$

Для решения такого уравнения, также как и в случае 2, вводим новую функцию $p(y)$, полагая $y' = p(y)$. Дифференцирование этого равенства по x приводит к уравнению

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p.$$

В результате наше исходное уравнение записывается в виде уравнения 1-го порядка

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p).$$

Решая его, находим функцию $p(y)$. Затем решаем еще одно уравнение первого порядка

$$y' = p(y)$$

и определяем общее решение $y(x)$.

Рассмотренные 5 случаев понижения порядка не являются независимыми. Исходя из структуры уравнений, ясно, что случай 2 следует из случая 5, а случай 3 вытекает из более общего случая 4.

Случай 6. Функция F(x, y, y', y'') является однородной функцией аргументов y, y', y''

Если левая часть дифференциального уравнения

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

удовлетворяет условию однородности, т.е. для любого k справедливо соотношение

$$F(x, ky, ky', ky'') = k^m F(x, y, y', y''),$$

то порядок уравнения можно понизить с помощью подстановки

$$y = \exp\left(\int z dx\right).$$

После нахождения функции $z(x)$ исходная функция $y(x)$ находится интегрированием по формуле

$$y(x) = C_2 \exp\left(\int z dx\right),$$

где C_2 − постоянная интегрирования.

Случай 7. Функция F(x, y, y', y'') является точной производной

Если удается найти такую функцию $\Phi(x, y, y')$, не содержащую второй производной y'' и удовлетворяющую равенству

$$F(x, y, y', y'') = \frac{d}{dx}\Phi(x, y, y'),$$

то решение исходного уравнения представляется интегралом

$$\Phi(x, y, y') = C.$$

Таким образом уравнение второго порядка можно привести к уравнению первого порядка.

В некоторых случаях левую часть исходного уравнения можно преобразовать в точную производную, используя интегрирующий множитель.

Пример 1

Решить уравнение $y'' = \sin x + \cos x$.

Решение.

Данный пример относится к случаю 1. Введем функцию $y' = p(x)$. Тогда $y'' = p'$. Следовательно,

$p' = \sin x + \cos x.$

Интегрируя, находим функцию $p(x)$:

$$\frac{dp}{dx} = \sin x + \cos x, \quad \Rightarrow dp = (\sin x + \cos x)\,dx, \quad \Rightarrow \int dp = \int (\sin x + \cos x)\,dx, \quad \Rightarrow p = -\cos x +$$

Учитывая, что $y' = p(x)$, проинтегрируем еще одно уравнение 1-го порядка:

$$y' = -\cos x + \sin x + C_1, \quad \Rightarrow \int dy = \int (-\cos x + \sin x + C_1)\,dx, \quad \Rightarrow y = -\sin x - \cos x + C_1 x + C_2.$$

Последняя формула представляет собой общее решение исходного дифференциального уравнения.

Контрольные вопросы

1. Каким уравнение называются дифференциальные уравнениями второго порядка?
2. Какие случаи решения уравнений вы знаете?
3. Решить уравнения: $y'' = 3x - 1$, $y'' = x^2 - 4$