Задание

1. Изучить теоретический материал темы, законспектировать.

2. Фотоотчет и сообщение присылать на электронную почту

С уважением, Хвастова Светлана Ивановна

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721389311 (ватсап). Электронная почта: xvsviv@rambler.ru

Тема «Статистическая гипотеза. Нулевая и конкурирующая гипотезы. Статистическая проверка гипотез»

1.Общий подход к проверке статистических гипотез

На практике часто приходится на основе результатов обследований, испытаний, наблюдений и т.д. проверять различные предположения о характеристиках конкретного массового явления. Приведем некоторые примеры.

Средние размеры деталей, производимых на однотипных, параллельно работающих станках, не различаются между собой.

При рассмотрении, например, свойств продукции разных машиностроительных предприятий может быть выдвинуто предположение о независимости характеристик механических свойств профилей от уровня технологии производства.

Пусть X – наблюдаемая дискретная или непрерывная случайная величина (СВ). Статистической гипотезой H называется предположение относительно параметров или вида распределения СВX.

Если распределение СВX известно и по выборке наблюдений необходимо проверить предположения о значениях параметров этого распределения, то такие гипотезы называются параметрическими.

Проверяемая гипотеза называется нулевой гипотезой и обозначается H_0. Наряду с гипотезой H_0 рассматривают одну из альтернативных (конкурирующих) гипотез H_1.

Например, если проверяется гипотеза о равенстве параметра θ некоторому заданному значению θ_0, то есть H_0: $\theta=\theta_0$, тов качестве альтернативной может быть выбрана одна из следующих гипотез:

H_1: $\theta>\theta_0$,

H_1: $\theta<\theta_0$,

H_1: $\theta\neq\theta_0$,

H_1: $\theta=\theta_1$, $(\theta_1\neq\theta_0)$.

Выбор альтернативной гипотезы определяется конкретной формулировкой задачи.

Для проверки гипотезы необходима контрольная величина z, которой является соответствующим образом выбранная и приспособленная к задаче функция выборки.

Проверка статистической гипотезы основывается на принципе, согласно которому маловероятные события считаются невозможными, а события, имеющие большую вероятность, - достоверными.

Перед анализом выборки фиксируется некоторая малая вероятность α, называемая уровнем значимости (чаще всего α выбирают равным 0,05; 0,01; 0,001 и т.д.). Пусть V – множество значений статистики z, а $V_k \subseteq V$ - такое его подмножество, что при условии того, что H_0 – истинна, вероятность попадания статистики критерия в V_k равна α, то есть $P(z \in V_k / H_0) = \alpha$.

Обозначим $z_в$ выборочное значение статистики z.

Критерий формулируется следующим образом:

— отклонить гипотезу H_0, если $z \in V_k$;

— принять гипотезу H_0, если $z \notin V_k$.

Критерий, основанный на использовании заранее заданного уровня значимости, называется критерием значимости.

Множество V_k всех значений статистики критерия z, при которых принимается решение отклонить гипотезу H_0, называется критической областью; область $V \setminus V_k$ называют областью принятия гипотезы H_0.

Уровень значимости α определяет «размер» критической области V_k. Положение критической области на множестве значений статистики z зависит от формулировки альтернативной гипотезы H_1.

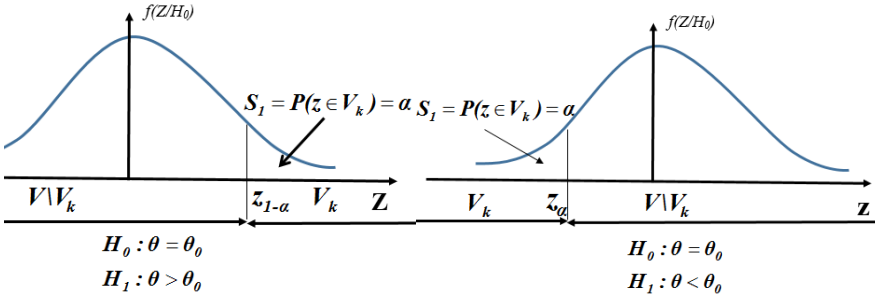


Рис. 2.1. Правосторонний критерий Рис. 2.2. Левосторонний критерий

На рисунках 2.1 и 2.2 приведены графики функции плотности распределения $f(z)$ при условии, что гипотеза H_0 верна. Критерий в этом случае называют односторонним (соответственно правосторонним и левосторонним). Если альтернативная гипотеза H_1 формулируется как H_1: $\theta \neq \theta_0$, то критическая область размещается на обоих «хвостах» распределения z, то есть определяется совокупностью неравенств: $z<z_{\alpha/2}$ и $z>z_{1-\alpha/2}$; в этом случае критерий называется двусторонним (рис. 2.3).

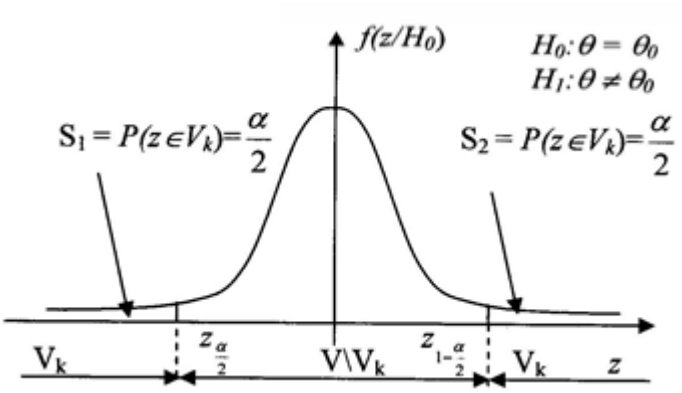


Рис. 2.3. Двусторонний критерий

При выборе критической области следует иметь в виду, что принимая или отвергая гипотезу H_0,можно допустить ошибки двух видов.

Ошибка первого рода состоит в том, что гипотеза H_0 отвергается в случае, когда она верна. Вероятность этой ошибки равна α.

Ошибка второго рода состоит в том, что H_0 принимается, когда она не верна.

Наличие таких ошибок объясняется тем, что проверка гипотезы осуществляется с помощью случайной конечной выборки, которая может оказаться «неудачной», приводящей к ложному выводу.

Вероятность совершить ошибку первого рода, т.е. забраковать верную гипотезу, обозначают через α и называют *уровнем значимости*.Чем меньше α, тем меньше вероятность отвергнуть верную гипотезу. На практике в качестве α чаще берут значение α= 0,05 = 5 %. Реже принимают α=0,1 иα = 0,01. Еслиα = 5 %, то это означает, что существует вероятностьошибочно отвергнуть правильную гипотезу в одном случае из 20. Вероятность совершить ошибку второго рода обозначают через β. Величину 1–βназывают *мощностью критерия*.

Между уровнем значимости α и мощностью критерия 1–β существует связь: с уменьшением уровня значимости α, а, значит, с уменьшением вероятности появления ошибки первого рода, падает мощность критерия. В этом случае он все меньше улавливает различие между нулевой и альтернативной гипотезами. Поэтому нельзя беспредельно уменьшать риск ошибки первого рода, так как суждения становятся все менее определенными.

2.2. Критерии согласия

В данном разделе речь пойдет о проверке гипотезы о виде распределения случайной величины X по результатам выборки, то есть о критериях согласия.

Нулевая гипотеза в этом случае записывается так:

$$H_0 : F_n(x) = F(x),$$

где $F_n(x)$-эмпирическая, а $F(x)$- теоретическая функция распределения вероятностей(см. с. 13).

Все известные критерии согласия условно можно разбить на три основные группы [1]:

— критерии, построенные на изучении разности между теоретической плотностью распределения вероятностей и эмпирической гистограммой;

— критерии, основанные на изучении разности между теоретической и эмпирической функциями распределения вероятностей;

— корреляционно-регрессионные критерии, основанные на изучении связей между эмпирическими и теоретическими порядковыми статистиками.

Вматематической статистике наиболее употребительными являются критерии согласия χ^2 Пирсона, Колмогорова, Смирнова,Реньи, Андерсона-Дарлинга, Купера, Дарбина, Канценбайссера-Хакля, двухвыборочный критерий Андерсона, критерии Романовского,Ястремского (два последнихприменяют для проверки близости эмпирического распределения признака *X*к нормальному или другим распределениям признака *X*, когда не используются конкретные значения параметров этих распределений) и другие.

Сначала рассмотрим критерий, который относится к первому типу.

2.2.1.Критерий согласия Пирсона χ^2

Критерий согласия Пирсона χ^2(хи-квадрат) применяют для проверки гипотезы о соответствии эмпирического распределения предполагаемому теоретическому распределению при большом объеме выборки (n> 100) и больших частотах (n_i> 5) вариант x_i[6].

Пусть $(x_1, x_2, ..., x_n)$ - выборка наблюдений СВ*X*. Проверяется гипотеза H_0: *X* имеет функцию распределения $F_X(x)$. Проверка осуществляется следующим образом.

1. По выборке наблюдений находят оценки параметров предполагаемого закона распределения СВ*X*.

2. Область возможных значений СВX разбивается на k множеств Δ_1, …, Δ_k (например, k интервалов, если X – непрерывная СВ, или k групп, состоящих из отдельных значений, если X – дискретная СВ).

3. Пусть n_i – число элементов выборки, попавших в i-й интервал Δ_i $(i = \overline{1, k})$. Очевидно, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Используя предполагаемый закон распределения СВ*X*, вычисляют вероятность попадания СВ*X* в интервал Δ_i $(i = \overline{1, k})$ - для

НСВX или вероятность того, что СВX примет конкретное значение – для ДСВX.

4. Полученные результаты представляют в таблице:

	Число наблюдений				Всего
	Δ_1	Δ_2		k	
Наблюдаемое	n_1	n_2		k	
Ожидаемое	np_1	np_2		p_k	

Выборочное значение статистики критерия χ^2 вычисляется по формуле:

$$\chi_в^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \quad . \qquad (2.1)$$

5. Гипотеза H_0 согласуется с результатами наблюдений на уровне значимости α если $\chi_в^2 < \chi_{1-\alpha}^2(k-l-1)$, где $\chi_{1-\alpha}^2(k-l-1)$ - квантиль порядка 1-α распределения χ^2 с k-l-1 степенями свободы (то есть $P(\chi^2 \geq \chi_{1-\alpha}^2) = \alpha$), l – число неизвестных параметров распределения, оцениваемых по выборке. $\chi_{1-\alpha}^2(k-l-1) = ХИ2ОБР(\alpha, k-l-1)$.

6. Если же $\chi_в^2 \geq \chi_{1-\alpha}^2(k-l-1)$, то гипотеза H_0 отклоняется.

Примечание. Критерий χ^2 использует тот факт, что случайная величина $\frac{n_i - np_i}{\sqrt{np_i}}$ имеет распределение, близкое к нормальному$N(0, 1)$. Чтобы это утверждение было достаточно точным, необходимо, чтобы для всех интервалов выполнялось условие $np_k \geq 5$.

Существует несколько подходов к работе с интервалами, в которых содержится небольшое число значений признака. Так, в [8] предложено

объединять интервалы, в которых $np_i<5$, если общее число интервалов мало. При числе степеней свободы, большем восьми, и не слишком малом объеме выборки ($n\geq40$) этот же автор предлагает не объединять такие интервалы.

Согласно Йетсу [9] группы с теоретическими частотами менее 5 следует объединять, что снижает влияние случайных ошибок.

В [10] предлагается объединять интервалы, содержащие малочисленные эмпирические частоты ($n_k<5$), а частоты этих интервалов - складывать. Если производилось объединение интервалов, то при определении числа степеней свободы следует в качестве k принять число интервалов, оставшихся после объединения интервалов.

В работах ряда авторов, например, Кохрана (CochranW.G.), показано, что статистику χ^2 можно использовать и тогда, когда не более, чем в 20% интервалов имеет место $1\leq np_i\leq5$.

Некоторые из этих подходов будут реализованы нами ниже.

Правило применения критерия χ^2 для проверки гипотезы о нормальном законе распределения признака X генеральной совокупности.

1. Пусть экспериментальные данные представлены в виде интервального вариационного ряда

Варианты-интервалы, $(x_{i-1};x_i)$	$[x_0;x_1]$	$(x_1;x_2]$	…	$(x_{k-1};x_k]$
частоты, n_i	n_1	n_2	…	n_k

Делается предположение о нормальномзаконе распределения признака X генеральной совокупности с параметрами m и σ^2, которые оцениваются по выборке(то есть находят оценки $\bar{x}$ и S^2 по формулам $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_ix_i,\quad S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_i(x_i-\bar{x})^2,\quad n=\sum_{i=1}^{k}n_i$). В качестве значения x_iберутся середины соответствующих интервалов. Выдвигается нулевая гипотеза:

$$H_0 : F(t) = \frac{1}{S\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2S^2}} dx.$$

2. В предположении, что случайная величина распределена нормально с параметрами $m = \bar{x}$ и $\sigma = S$, вычисляют вероятности p_i ($i = \overline{0, k-1}$) ее попадания в интервалы $(-\infty, x_1]$, $(x_1, x_2]$, … , (x_k, ∞)

$$p_{i+1} = P(x_i \le x \le x_{i+1}) = F(x_{i+1}) - F(x_i),$$

где $F(t) = \frac{1}{S\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2S^2}} dx$.

Умножив каждую вероятность на объем выборки n, получаем теоретическую частоту попадания в каждый из интервалов. Она равна np_i. Если окажется, что эмпирические частоты для некоторых интервалов меньше 5, то соседние интервалы объединяются так, чтобы сумма их частот стала больше или равна 5. Соответственно складываются и теоретические частоты объединяемых интервалов.

3. Выборочное значение статистики критерия χ^2 вычисляется по формуле:

$$\chi^2_в = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

4. Гипотеза H_0 согласуется с результатами наблюдений на уровне значимости α, если $\chi^2_в < \chi^2_{1-\alpha}(k-l-1)$, где $\chi^2_{1-\alpha}(k-l-1)$ - квантиль порядка 1-α распределения χ^2 с $f=k-l-1$ степенями свободы (то есть $P(\chi^2 \ge \chi^2_{1-\alpha}) = \alpha$), l – число неизвестных параметров распределения, оцениваемых по выборке (в нашем случае 2).

$\chi^2_{1-\alpha}(k-2-1) = ХИ2ОБР(\alpha, k-2-1).$

5. Если же $\chi^2_в \ge \chi^2_{1-\alpha}(k-3)$, то гипотеза H_0 отклоняется.

Критерий Пирсона можно применять для проверки гипотезы о том, что данная выборка взята из генеральной совокупности, распределенной по биномиальному закону, по закону Пуассона, по экспоненциальному законуи

др.

2.2.2.Критерий Романовского

В [11] В.И. Романовский приводит простое правило, позволяющее при решении практических задач облегчить применение критерия хи-квадрат, не вычисляя критические значения. Это правило основано на том, что, с учетом того, что $M(\chi^2) = f$, а $D(\chi^2) = 2f$, где f – число степеней свободы, можно установить, что вероятность значений χ^2, отличающихся от f на 3σ, то есть на $3\sqrt{2f}$, в ту или другую сторону, более 0,98 при $f \leq 7$, и более 0,99 при $f > 7$. Отсюда следует правило:

если $\frac{\left|\chi_в^2 - f\right|}{\sqrt{2f}} \geq 3,$ то расхождения можно считать существенными и гипотеза H_0 отвергается.

Если же $\frac{\left|\chi_в^2 - f\right|}{\sqrt{2f}} < 3,$ то расхождения можно считать несущественными, поэтому нет оснований отвергнуть гипотезу H_0.

2.2.3.Критерий Колмогорова-Смирнова

Критерий Колмогорова-Смирнова относится ко второму типу и в своем классическом виде является более мощным, чем критерий Пирсона, и может быть использован для проверки гипотезы о соответствии эмпирического распределения любому теоретическому непрерывному распределению $F(x)$ с заранее известными параметрами. Однако параметры функции распределения $F(x)$, как правило, нам неизвестны, и их оценка производится по данным самой выборки. Это обстоятельство накладывает ограничения на возможность широкого практического применения критерия: он может быть использован только для проверки соответствия опытных данных лишь некоторым конкретным функциям распределения.

Для проверки соответствия эмпирического распределения теоретическому нормальному распределению критерий Колмогорова

применяют следующим образом.

Пусть $F_n(x)$ - эмпирическая функция распределения случайной величины *X*, представленной выборкой ($x_1, x_2, ..., x_n$).

Для проверки нулевой гипотезы

$$H_0 : F_n(x) = F(x)$$

где *F(x)* – теоретическая функция распределения, в качестве меры расхождения между теоретическим и эмпирическим распределениями рассматривают максимальное значение абсолютной величины разности между эмпирической функцией распределения $F_n(x)$ и соответствующей теоретической функцией распределения $F(x)$

$$D = \max_{-\infty \le x \le \infty} |F_n(x) - F(x)|. \qquad (2.2)$$

Эта величина называется *статистикой критерия Колмогорова-Смирнова*.

Для практического применения используются формулы

$$D_n^+ = \max_{1 \le i \le n} |F_n(x_{i+1}) - F(x_i)|, \; D_n^- = \max_{1 \le i \le n} |F_n(x_i) - F(x_i)|, \; D_n = \max(D_n^+, D_n^-).$$

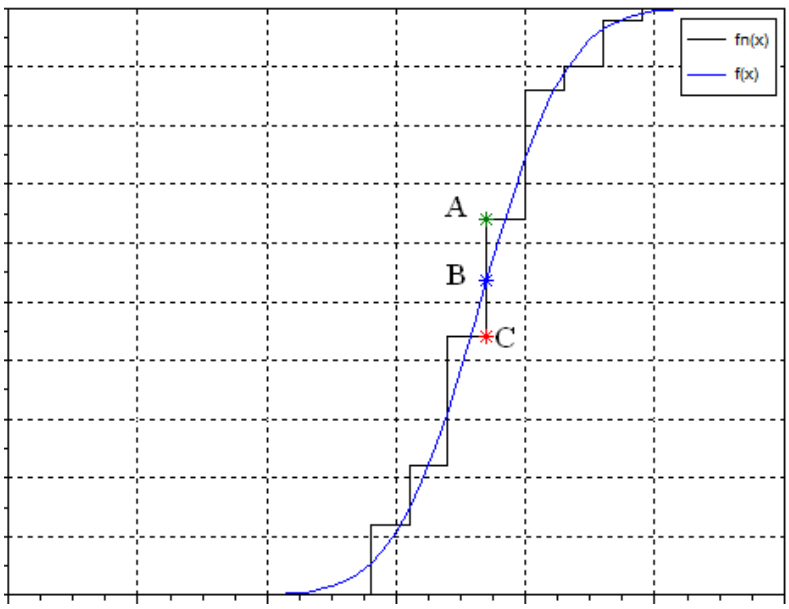


Рис. 2.4. Графики теоретической и эмпирической функций распределения

На приведенном графике D_n^- - это расстояния типа ВС, D_n^+ - расстояния типа АВ.

Между критическими значениями D_n и $D_n^+(D_n^-)$ существует соотношение $D_n^+(\alpha)(D_n^-(\alpha)) = D_n(2\alpha)$, где α – уровень значимости.

Для проверки закона о нормальности распределения в случае, когда параметры распределения оцениваются по выборке, в качестве статистики критерия предложено использовать статистику [1] $D_n^н = D_n(\sqrt{n} - 0{,}01 + \frac{0{,}85}{\sqrt{n}})$.

В качестве первого приближения можно использовать

$$D_n(\alpha) = \left\{\frac{1}{2}\ln\frac{2}{1-\alpha}\right\}^{-1}, \quad D_n^{+(-)}(\alpha) = \left\{\frac{1}{2}\ln\frac{1}{1-\alpha}\right\}^{-1}.$$

Другие виды приближений для критических значений при различных объемах выборок можно найти в [1].

Если $D_n^н > D_n(\alpha)$, то гипотеза согласия H_0 отклоняется на уровне значимости α.

Замечание

Можно отметить, что решение подобных задач можно было бы найти с помощью критерия χ^2. Потенциальное преимущество критерия Колмогорова-Смирнова в том, что он не требует группирования данных (с неизбежной потерей информации), а дает возможность рассматривать индивидуальные наблюдаемые значения. Этот критерий можно успешно применять для малых выборок. Считается, что его мощность, вообще говоря, выше, чем у критерия χ^2.

Критические значения статистики Колмогорова-Смирнова, модифицированной для проверки нормальности распределения, можно взять из таблицы [1].

α	0,15	0,10	0,05	0,03	0,01
$D_n^н(\alpha)$	0,77	0,81	0,89	0,95	1,03

	5	9	5	5	5

В[6]предложена несколько иная методика расчетов.

Определение. Говорят, что случайная величина X подчиняется распределению Колмогорова (X~К), если ее функция распределения $F(x) = P(x < X) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k e^{-2k^2x^2}$, $x > 0$.

Вычисляется статистика λ критерия Колмогорова по формуле:

$$\lambda = \frac{D}{\sqrt{n}}, \qquad (2.3)$$

где D=max|M-M*|— максимум абсолютного значения разности между накопленными эмпирическими частотами M и накопленными теоретическими частотами M*,n— объем выборки.

По вычисленномуλ находят значение функции

$K(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k e^{-2k^2\lambda^2} = P(X \geq \lambda)$ — вероятность того, чтоСВ X примет значение большее или равноеλ. График функцииK(λ)имеет следующий вид:

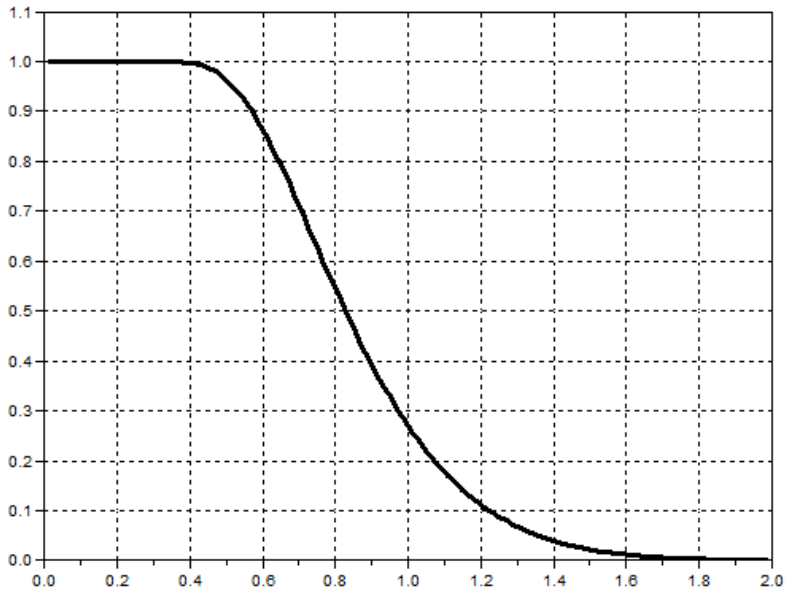


Рис.2.5. График функцииK(λ)

Примечание: Программа для нахождения величины K(λ)

clc

```
function y=funK(lam)
s=0;
for p=-1000:1000;
  s=s+(-1)^p*exp(-2*p^2*lam^2);
end
y=1-s;
endfunction
lam=0.01:0.02:2;
plot(lam,funK(lam))
xgrid()
```

Значения $K(\lambda)$можно найтипо табл. 2.1 или воспользоваться приведенной выше программой.

Если найденному значению λ соответствует очень малая вероятность, т.е.$K(\lambda)<0.05$, то имеет место существенное расхождение между эмпирическим и теоретическим распределениями, которое нельзя считать случайным. Следовательно, рассматриваемая выборка не может быть смоделирована нормальным законом распределения.

Если вероятность$K(\lambda)\geq 0.05$,то расхождение между частотами может быть случайным,и распределения хорошо соответствуют одно другому.

Таблица 2.1

Значение функции *K*(λ)

λ	*K*(λ)	λ	*K* (λ)
0,30	1,0000	1,10	0,1777
0,35	0,9997	1,20	0,1122
0,40	0,9972	1,30	0,681
0,45	0,9874	1,40	0,397
0,50	0,9639	1,50	0,222
0,55	0,9228	1,60	0,120

0,60	0,8643	1,70	0,052
0,70	0,7112	1,90	0,015
0,75	0,6272	2,00	0,007
0,80	0,5441	2,10	0,0003
0,85	0,4653	2,20	0,0001
0,90	0,3927	2,30	0,0001
0,95	0,3275	2,40	0,0000
1,00	0,2700	2,50	0,0000

Если проверяют гипотезу по критерию Колмогорова о соответствии выборки экспоненциальному распределению, параметры которого оценивают по опытным данным, то сначала вычисляют статистики [6]:

$$D_n^+ = \max_{1\le i\le n}\left[\frac{i}{n} - 1 + \exp(-x_i/\bar{x})\right],\ D_n^- = \max_{1\le i\le n}\left[1 - \exp(-x_i/\bar{x}) - \frac{i-1}{n}\right],$$

$$D_n = \max_{1\le i\le n}[D_n^+, D_n^-]$$

Затем составляют неравенство:

$$\left(D_n - \frac{0,2}{n}\right)\left(\sqrt{n} + 0,26 + \frac{0,5}{n}\right) \le \lambda_\alpha \qquad (2.4)$$

Критические значения λ_α для этого случая:$\lambda_{0,1}$=0,99,$\lambda_{0,05}$=1,09 и $\lambda_{0,01}$ =1,31. Если неравенство(2.4)при выбранномλ_αвыполняется, то это означает, что эмпирическое распределение можно изучать на математической модели, подчиняющейся экспоненциальному закону распределения.

2.2.4.Критерий Ястремского

Для проверки соответствия данной выборочной совокупности признака *X* нормальному распределению по данному критерию, нужно проверить неравенство:

$$J \le 3\sqrt{2\mathrm{k} + 4\Theta},$$

где $J = |c - \mathrm{k}|, c = \sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i(1-p_i)}$, n_i– эмпирические частоты, np_i - теоретические частоты,*k*– число интервалов дискретного вариационного,*n*- объем выборки.

Если k<20, то Θ=0,6.

Если вычисленное значение J меньше $3\sqrt{2k+4\Theta}$, то гипотеза о близости эмпирического распределения признака X к нормальному закону распределения принимается. При значениях J больших $3\sqrt{2k+4\Theta}$, расхождения между эмпирическим и теоретическим распределениями существенно. В этом случае данные выборки не будут подчиняться нормальному закону распределения.

Обозначим $p_i' = \frac{n_i'}{n_i}$; $q_i' = 1 - p_i'$. Для вычисления величины c составляетсятабл. 2.2.

Таблица 2.2

i						$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i' q_i'}$
								c =

2.2.5.Приближенные критерии нормальности распределения

Для проверки гипотезы о соответствии данной выборки нормальному закону распределения можно использовать выборочные статистики: асимметрию и эксцесс.После вычисления этих характеристик по формулам (1.11) и (1.13),находят их средние квадратические отклонения:

$$S_{A_s} = \sqrt{\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}} \tag{2.5}$$

$$S_{E_x} = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n-1)^2(n+3)(n+5)}} \tag{2.6}$$

Если $|A_s| < S_A$ и $|E_x| < S_E$, то считают, что выборочная совокупность подчиняется нормальному законураспределения.

Если $|A_s|$ и $|E_x|$ существенно больше своих средних квадратических отклонений, то гипотеза о нормальном распределении выборочной совокупностиотвергается.

Проверку выборочной совокупности на близость ее к нормальному распределению можно производить, используя совокупность статистикχ^2,A_s и E_x.В этом случае сначала вычисляют статистику χ^2 по формуле:

$$\chi^2 = \frac{A_S^2}{S_{A_S}^2} + \frac{E_x^2}{S_{E_x}^2}$$

Затем при заданном уровне значимости α и числе степеней свободы k=2 (по числу используемыхстатистик:A_sиE_x)по Приложению4находят $\chi_{кр}^2$.

Если вычисленное значение χ^2меньше $\chi_{кр}^2$, то гипотезу о нормальном распределении выборочной совокупности принимают. В противном случае, т.е. когда $\chi^2 > \chi_{кр}^2$, гипотезу о нормальном распределении выборки отвергают.

Проверка гипотез относительно средних

Пример 1. Для проверки эффективности новой технологии отобраны две группы рабочих: в первой группе численностью $n_1 = 50$ чел., где применялась новая технология, выборочная средняя выработка составила $\bar{x} = 85$ (медицинских изделий), во второй группе численностью $n_2 = 70$ чел. выборочная средняя – $\bar{y} = 78$ (медицинских изделий). Предварительно установлено, что дисперсии выработки в группах равны соответственно $\sigma_x^2 = 100$ и $\sigma_y^2 = 74$. На уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ выяснить влияние новой медицинской технологии на среднюю производительность.

Решение: Проверяемая гипотеза $\mathrm{H}_0: \bar{x}_0 = \bar{y}_0$, т.е. средние выработки одинаковы по новой и старой технологиям. В качестве конкурирующей гипотезы возьмем $\mathrm{H}_1: \bar{x}_0 > \bar{y}_0$.

Вычислим фактическое значение статистики критерия:

$$t = \frac{85 - 78}{\sqrt{\frac{100}{50} + \frac{74}{70}}} = 4{,}00.$$

При конкурирующей гипотезе H_1: критическое значение статистики находим из условия $\Phi(t_{\text{кр}}) = \Phi(t_{1-2\alpha}) = 1 - 2\alpha$, т.е. $\Phi(t_{\text{кр}}) = 1 - 2 \cdot 0{,}05 = 0{,}9$, откуда по таблице находим $t_{\text{кр}} = t_{0{,}9} = 1{,}64$ (см. приложение, таблица II). Так как фактически наблюдаемое значение $t = 4{,}00$ больше критического значения, то гипотеза H_0 отвергается, т.е. на 5% уровне значимости можно сделать вывод, что новая технология позволяет повысить среднюю выработку рабочих.

Пример 2. По двум независимым малым выборкам объемов $n_1 = 5$ и $n_2 = 6$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние $\bar{x} = 33$; $\bar{y} = 2{,}48$. Известно, что генеральные дисперсии примерно равны, т.е. $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$. При уровне значимости $\alpha \leq 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу $H_0: M(X) = M(Y)$, если $t_{\text{наб}} = 3{,}27$.

Решение:

С помощью таблицы найдем критическое значение статистики при уровне значимости $\alpha \leq 0{,}05$ и числе степеней свободы $f = n_1 + n_2 - 2 = 5 + 6 - 2 = 9$, $t_{\text{кр}} = 2{,}26$ (см. приложение, таблица IV). Так как $t_{\text{наб}} > t_{\text{кр}}(\alpha, f)$, то гипотеза H_0 отвергается, т.е. выборочные средние различаются значимо.

Проверка гипотез для дисперсий

Пример 3. По двум независимым выборкам объемов $n_1 = 12$ и $n_2 = 15$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X_1 и X_2, найдены исправленные выборочные дисперсии $\hat{S}_{x_1}^2 = 11{,}41$ и $\hat{S}_{x_2}^2 = 6{,}52$. При уровне значимости $\alpha \leq 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий $H_0: \sigma_{x_1}^2 = \sigma_{x_2}^2$.

Решение: Пусть нулевая гипотеза $H_0: \sigma_{x_1}^2 = \sigma_{x_2}^2$, составим конкурирующую гипотезу $H_1: \sigma_{x_1}^2 \geq \sigma_{x_2}^2$. В данном случае величина F будет равна: $F_{\text{набл}} = \frac{\hat{S}_{\text{б}}^2}{\hat{S}_{\text{м}}^2}$; $F_{\text{набл}} = \frac{11{,}41}{6{,}52} = 1{,}75$. По таблице (см. приложение, таблица VI) находим критическое значение -критерия на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$

при числе степеней свободы $f_1 = n_1 - 1 = 12 - 1 = 11, f_2 = n_2 - 1 = 15 - 1 = 14$:

$$F_{\text{крит}}(\alpha \leq 0{,}05, f_1 = n_1 - 1 = 12 - 1 = 11, f_2 = n_2 - 1 = 15 - 1 = 14) = 2{,}57;$$

Так как $F_{\text{набл}} < F_{\text{крит}}(\alpha, f_1, f_2)$, то нет оснований отвергать нулевую гипотезу H_0 о равенстве генеральных дисперсий.

Пример 4. По двум независимым малым выборкам объемов $n_1 = 5$ и $n_2 = 6$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние $\bar{x} = 8{,}3$; и$\bar{y} = 7{,}48$ и выборочные дисперсии $\hat{S}_x^2 = 0{,}251$ и $\hat{S}_y^2 = 0{,}108$. При уровне значимости$\alpha \leq 0{,}05$проверить нулевую гипотезу $H_0: M(X) = M(Y)$.

Решение: Так как выборочные дисперсии различны, проверим предварительно нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий, пользуясь критерием Фишера-Снедекора. Найдем отношение большей исправленной дисперсии к меньшей:

$$F_{\text{набл}} = \frac{0{,}251}{0{,}108} = 2{,}32$$

По таблице (см. приложение, таблица VI) при $\alpha \leq 0{,}05$ и числам степеней свободы $f_1 = n_1 - 1 = 5 - 1 = 4$ и $f_2 = n_2 - 1 = 6 - 1 = 5$, находим критическую точку

$$F_{\text{крит}}(\alpha \leq 0{,}05, f_1 = 4, f_2 = 5) = 5{,}19.$$

Так как $F_{\text{набл}} < F_{\text{крит}}(\alpha, f_1, f_2)$, то нет оснований отвергать нулевую гипотезу H_0 о равенстве генеральных дисперсий. Теперь можно сравнить средние.

Вычислим наблюдаемое значение критерия Стьюдента:

$$t_{\text{набл}} = \frac{8{,}3 - 7{,}48}{\sqrt{\frac{5 \cdot 0{,}251 + 6 \cdot 0{,}108}{5 + 6 - 2} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)}} = 2{,}94$$

По таблице Стьюдента находим критическую точку:

$$t_{\text{кр}}(\alpha \leq 0{,}05, f = 5 + 6 - 2 = 9) = 2{,}26.$$

Так как $t_{\text{набл}} > t_{\text{кр}}(\alpha, f)$, то принимаем гипотезу H_1, т.е. выборочные средние различаются значимо $(\alpha \leq 0{,}05)$.

Проверка гипотез о законах распределения

Пример 5. В таблице представлены изменения выработки на одного основного рабочего. Проверить гипотезу, что выработка рабочих цеха распределена по нормальному закону при $\alpha = 0{,}05$.

Выработка, %	94 − 100	100 − 106	106 − 112	112 − 118	118 − 124	124 − 130	130 − 136	136 − 142
Число рабочих	3	7	11	20	28	19	10	2

Решение: Предположим нормальный закон распределения признака. Параметры нормального закона α и σ^2, являющиеся соответственно математическим ожиданием и дисперсией случайной величины X, неизвестны, поэтому заменяем их «наилучшими» оценками по выборке – несмещенными и состоятельными оценками соответственно выборочной средней $\bar{x}$ и «исправленной» выборочной дисперсией $\hat{S}^2$. Так как число наблюдений $n = 100$ достаточно велико, то вместо «исправленной» $\hat{S}^2$ можно взять «обычную» выборочную дисперсию S^2. В данном случае выборочная средняя равна $\bar{x} = 119{,}2\ (\%)$, выборочная дисперсия $S^2 = 87{,}48$ и выборочное среднее квадратическое отклонение $S = 9{,}35\ (\%)$.

Для расчета вероятностей p_i попадания случайной величины X в интервал $[x_i, x_{i+1}]$ используем функцию Лапласа (см. приложение, таблица *II*) в соответствии со свойством нормального распределения:

$$p_i = (x_i \leq X \leq x_{i+1}) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x_{i+1}-\alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_i-\alpha}{\sigma}\right)\right] \approx \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x_{i+1}-119{,}2}{9{,}35}\right) - \Phi\left(\frac{x_i-119{,}2}{9{,}35}\right)\right]$$

Например,

$$p_i = (94 \le X \le 100) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{100-119{,}2}{9{,}35}\right) - \Phi\left(\frac{94-119{,}2}{9{,}35}\right)\right]$$

$$\approx \frac{1}{2}[\Phi(-2{,}05) - \Phi(-2{,}69)] = \frac{1}{2}(-0{,}9596 + 0{,}9928) = 0{,}0166;$$

и соответствующая первому интервалу теоретическая частота

$np_1 = 100 \cdot 0{,}0166 \approx 1{,}7.$

$$p_i = (100 \le X \le 106) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{106-119{,}2}{9{,}35}\right) - \Phi\left(\frac{100-119{,}2}{9{,}35}\right)\right]$$

$$\approx \frac{1}{2}[\Phi(-1{,}42) - \Phi(-2{,}05)] = \frac{1}{2}(-0{,}8415 + 0{,}9596) = 0{,}059;$$

и соответствующая второму интервалу теоретическая частота

$np_2 = 100 \cdot 0{,}059 \approx 5{,}9$ и т.д.

Для определения статистики χ^2 удобно составить таблицу:

i	Интервал $[x_i, x_{i+1}]$	Эмпирические частоты n_i	Вероятности p_i	Теоретические частоты np_i	$(n_i - np_i)^2$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
1	$94 - 100$	3	0,017	1,7	5,76	0,758
2	$100 - 106$	7	0,059	5,9		
3	$106 - 112$	11	0,141	14,1	9,61	0,682
4	$112 - 118$	20	0,228	22,8	7,84	0,344
5	$118 - 124$	28	0,247	24,7	10,89	0,441
6	$124 - 130$	19	0,182	18,2	0,64	0,035
7	$130 - 136$	10	0,087	8,7	0,16	0,014
8	$136 - 142$	2	0,029	2,9		
	$\sum$	100	0,990	99,0	$-$	$\chi^2 = 2{,}27$

Учитывая, что рассматриваемом эмпирическом распределении частоты первого и последнего интервалов $(n_1 = 3, n_8 = 2)$ меньше 5 , при использовании критерия χ^2 – Пирсона целесообразно объединить указанные интервалы с соседними. Итак, фактически наблюдаемое значение статистики $\chi^2 = 2{,}27$.

Так как новое число интервалов (с учетом объединение крайних) $m = 6$, а нормальный закон распределения определяется $r = 2$ параметрами, то число степеней свободы $k = m - r - 1 = 6 - 2 - 1 = 3$. Соответствующее критическое значение статистики χ^2 по таблице V приложений $\chi^2_{0{,}05;3} = 7{,}82$. Так как $\chi^2 < \chi^2_{0{,}05;3}$, то гипотеза о выбранном теоретическом нормальном законе с параметрами $N(119{,}2; 87{,}48)$ согласуется с опытными данными.

Пример 6. По данным примера 5 с помощью критерия Колмогорова на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу H_0 о том, что случайная величина X – выработка рабочих предприятия – имеет нормальный закон распределения с параметрами $a = 119{,}2;\ \sigma^2 = 87{,}48$, т.е. $N(119{,}2; 87{,}48)$.

Решение: Для построения теоретической функции распределения для нормального закона воспользуемся ее выражением через функцию Лапласа(см. приложение, таблица II):

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-119{,}2}{9{,}35}\right).$$

Например,

$$F(94) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{94 - 119{,}2}{9{,}35}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(-2{,}69) = 0{,}5 - 0{,}5 \cdot 0{,}9928$$
$$= 0{,}0036 \approx 0{,}004$$

и т.д. Результаты вычислений сведем в таблицу.

x	94	100	106	112	118	124	130	136	142
$F_n(x)$	0,010	0,030	0,100	0,210	0,410	0,690	0,880	0,980	1,000
$F(x)$	0,004	0,021	0,080	0,221	0,449	0,695	0,878	0,964	0,993

Находим $D = max|F_n(x) - F(x)|$:

$$D = |F_n(118) - F(118)| = |0{,}410 - 0{,}449| = 0{,}039$$

Тогда величина $\lambda = D\sqrt{n} = 0{,}039\sqrt{100} = 0{,}39$.

Критическое значение критерия Колмогорова по таблице равно $\lambda_{0,05} = 1{,}36$. Так как $\lambda < \lambda_{0,05}(0{,}39 < 1{,}36)$, то гипотеза H_0 согласуется с опытными данными.

Непараметрические критерии

Пример 7. Проведено 100 опытов по изучению влияния фактора на артериальное давление. При $\alpha \leq 0{,}05$ оценить значимость различия в действии данного фактора на группы животных, если положительная разность давленийn_+, наблюдалась 48 раз, а отрицательная n_-– 44 раза.

Решение:

Из чисел 48 и 44 выбираем наименьшее – это 44: $n_N^{\text{набл}} = 44$

Найдем $n_N^{\text{крит}}$ по формуле:

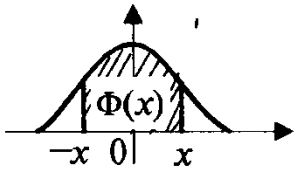
$$A = \frac{100 - 1}{2} - 0{,}98 \cdot \sqrt{100 + 1} = 39{,}6$$

Целая часть числа $A = 39$: $n_N^{\text{крит}} = 39$.

Так как $44 > 39$, $n_N^{\text{набл}} > n_N^{\text{крит}} \Rightarrow H_0$, т.е. принимаем H_0. Влияние фактора незначимо.

Таблица II

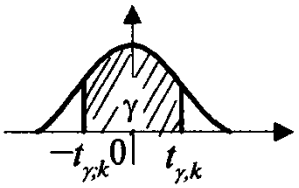
Значения функции Лапласа $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$



Целые и десятые доли x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0080	0,0160	0,0239	0,0319	0,0399	0,0478	0,0558	0,0638	0,0717
0,1	0,0797	0,0876	0,0955	0,1034	0,1113	0,1192	0,1271	0,1350	0,1428	0,1507
0,2	0,1585	0,1663	0,1741	0,1819	0,1897	0,1974	0,2051	0,2128	0,2205	0,2282
0,3	0,2358	0,2434	0,2510	0,2586	0,2661	0,2737	0,2812	0,2886	0,2960	0,3035
0,4	0,3108	0,3182	0,3255	0,3328	0,3401	0,3473	0,3545	0,3616	0,3688	0,3759
0,5	0,3829	0,3899	0,3969	0,4039	0,4108	0,4177	0,4245	0,4313	0,4381	0,4448
0,6	0,4515	0,4581	0,4647	0,4713	0,4778	0,4843	0,4907	0,4971	0,5035	0,5098
0,7	0,5161	0,5223	0,5285	0,5346	0,5407	0,5467	0,5527	0,5587	0,5646	0,5705
0,8	0,5763	0,5821	0,5878	0,5935	0,5991	0,6047	0,6102	0,6157	0,6211	0,6265
0,9	0,6319	0,6372	0,6424	0,6476	0,6528	0,6579	0,6629	0,6679	0,6729	0,6778
1,0	0,6827	0,6875	0,6923	0,6970	0,7017	0,7063	0,7109	0,7154	0,7199	0,7243
1,1	0,7287	0,7330	0,7373	0,7415	0,7457	0,7499	0,7540	0,7580	0,7620	0,7660
1,2	0,7699	0,7737	0,7775	0,7813	0,7850	0,7887	0,7923	0,7959	0,7984	0,8029
1,3	0,8064	0,8098	0,8132	0,8165	0,8198	0,8230	0,8262	0,8293	0,8324	0,8355
1,4	0,8385	0,8415	0,8444	0,8473	0,8501	0,8529	0,8557	0,8584	0,8611	0,8638
1,5	0,8664	0,8690	0,8715	0,8740	0,8764	0,8789	0,8812	0,8836	0,8859	0,8882
1,6	0,8904	0,8926	0,8948	0,8969	0,8990	0,9011	0,9031	0,9051	0,9070	0,9090
1,7	0,9109	0,9127	0,9146	0,9164	0,9181	0,9199	0,9216	0,9233	0,9249	0,9265
1,8	0,9281	0,9297	0,9312	0,9327	0,9342	0,9357	0,9371	0,9385	0,9392	0,9412
1,9	0,9426	0,9439	0,9451	0,9464	0,9476	0,9488	0,9500	0,9512	0,9523	0,9533
2,0	0,9545	0,9556	0,9566	0,9576	0,9586	0,9596	0,9606	0,9616	0,9625	0,9634
2,1	0,9643	0,9651	0,9660	0,9668	0,9676	0,9684	0,9692	0,9700	0,9707	0,9715
2,2	0,9722	0,9729	0,9736	0,9743	0,9749	0,9756	0,9762	0,9768	0,9774	0,9780
2,3	0,9786	0,9791	0,9797	0,9802	0,9807	0,9812	0,9817	0,9822	0,9827	0,9832
2,4	0,9836	0,9841	0,9845	0,9849	0,9853	0,9857	0,9861	0,9865	0,9869	0,9872
2,5	0,9876	0,9879	0,9883	0,9886	0,9889	0,9892	0,9895	0,9898	0,9901	0,9904
2,6	0,9907	0,9910	0,9912	0,9915	0,9917	0,9920	0,9922	0,9924	0,9926	0,9928
2,7	0,9331	0,9933	0,9935	0,9937	0,9939	0,9940	0,9942	0,9944	0,9946	0,9947
2,8	0,9949	0,9951	0,9952	0,9953	0,9955	0,9956	0,9958	0,9959	0,9960	0,9961
2,9	0,9963	0,9964	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972
3,0	0,9973	0,9974	0,9975	0,9976	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980
3,1	0,9981	0,9981	0,9982	0,9983	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986
3,2	0,9986	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,3	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,4	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	0,9995
3,5	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997
3,6	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998
3,7	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
4,0	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

Таблица IV

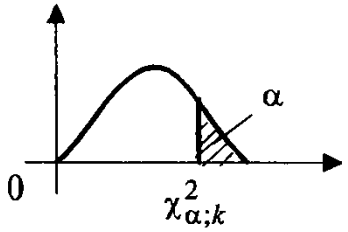
Значения $t_{\gamma,k}$-критерия Стьюдента



Число степеней свободы k	Вероятность γ											
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99
1	0,16	0,32	0,51	0,73	1,00	1,38	1,96	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66
2	14	29	44	62	0,82	06	34	1,89	2,92	4,30	6,96	9,92
3	14	28	42	58	76	0,98	25	64	35	3,18	4,54	5,84
4	13	27	41	57	74	94	19	53	13	2,78	3,75	4,60
5	13	27	41	56	73	92	16	48	01	57	36	03
6	0,13	0,26	0,40	0,55	1,72	1,91	1,13	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71
7	13	26	40	55	71	90	12	41	89	36	00	50
8	13	26	40	55	70	89	11	40	86	31	2,90	35
9	13	26	40	54	70	88	10	38	83	26	82	25
10	13	26	40	54	70	88	09	37	81	23	76	17
11	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,88	1,09	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11
12	13	26	39	54	69	87	08	36	78	18	68	05
13	13	26	39	54	69	87	08	35	77	16	65	01
14	13	26	39	54	69	87	08	34	76	14	62	2,98
15	13	26	39	54	69	87	07	34	75	13	60	95
16	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,07	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92
17	13	26	39	53	69	86	07	33	74	11	57	90
18	13	26	39	53	69	86	07	33	73	10	55	88
19	13	26	39	53	69	86	07	33	73	09	54	86
20	13	26	39	53	69	86	06	32	72	09	53	84
21	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,06	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83
22	13	26	39	53	69	86	06	32	72	07	51	82
23	13	26	39	53	68	86	06	32	71	07	50	81
24	13	26	39	53	68	86	06	32	71	06	49	80
25	13	26	39	53	68	86	06	32	71	06	48	79
26	0,13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,86	1,06	1,31	1,71	2,06	2,48	2,78
27	13	26	39	53	68	85	06	31	70	05	47	77
28	13	26	39	53	68	85	06	31	70	05	47	76
29	13	26	39	53	68	85	05	31	70	04	46	76
30	13	26	39	53	68	85	05	31	70	04	46	75
40	0,13	0,25	0,39	0,53	0,68	0,85	1,05	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70
60	13	25	39	53	68	85	05	30	67	00	39	66
120	0,13	0,25	0,39	0,53	0,68	0,84	1,04	1,29	1,66	1,98	2,36	2,62
∞	13	25	38	52	67	84	04	28	64	96	33	58

Таблица V

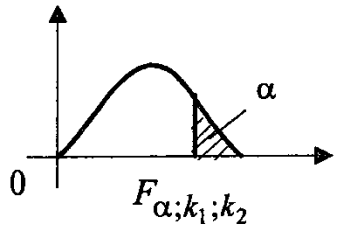
Значения $\chi^2_{\alpha;k}$ критерия Пирсона



Число степеней свободы k	Вероятность α												
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,00	0,00	0,00	0,02	0,06	0,15	0,45	1,07	1,64	2,71	3,84	5,41	6,64
2	0,02	0,04	0,10	0,21	0,45	0,71	1,39	2,41	3,22	4,60	5,99	7,82	9,21
3	0,11	0,18	0,35	0,58	1,00	1,42	2,37	3,66	4,64	6,25	7,82	9,84	11,3
4	0,30	0,43	0,71	1,06	1,65	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49	11,7	13,3
5	0,55	0,75	1,14	1,61	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24	11,1	13,4	15,1
6	0,87	1,13	1,63	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,6	12,6	15,0	16,8
7	1,24	1,56	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	9,80	12,0	14,1	16,6	18,5
8	1,65	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,0	13,4	15,5	18,2	20,1
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,7	12,2	14,7	16,9	19,7	21,7
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,8	13,4	16,0	18,3	21,2	23,2
11	3,05	3,61	4,58	5,58	6,99	8,15	10,3	12,9	14,6	17,3	19,7	22,6	24,7
12	3,57	4,18	5,23	6,30	7,81	9,03	11,3	14,0	15,8	18,5	21,0	24,1	26,2
13	4,11	4,76	5,89	7,04	8,63	9,93	12,3	15,1	17,0	19,8	22,4	25,5	27,7
14	4,66	5,37	6,57	7,79	9,47	10,8	13,3	16,2	18,1	21,1	23,7	26,9	29,1
15	5,23	5,98	7,26	8,55	10,3	11,7	14,3	17,3	19,3	22,3	25,0	28,3	30,6
16	5,81	6,61	7,96	9,31	11,1	12,6	15,3	18,4	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0
17	6,41	7,26	8,67	10,1	12,0	13,5	16,3	19,5	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4
18	7,02	7,91	9,39	10,9	12,9	14,4	17,3	20,6	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8
19	7,63	8,57	10,1	11,6	13,7	15,3	18,3	21,7	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2
20	8,26	9,24	10,8	12,4	14,6	16,3	19,3	22,8	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6
21	8,90	9,92	11,6	13,2	15,4	17,2	20,3	23,9	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9
22	9,54	10,6	12,3	14,0	16,3	18,1	21,3	24,9	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3
23	10,2	11,3	13,1	14,8	17,2	19,0	22,3	26,0	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6
24	10,9	12,0	13,8	15,7	18,1	19,9	23,3	27,1	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0
25	11,5	12,7	14,6	16,5	18,9	20,9	24,3	28,2	30,7	34,4	37,7	41,7	44,3
26	12,2	13,4	15,4	17,3	19,8	21,8	25,3	29,2	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6
27	12,9	14,1	16,1	18,1	20,7	22,7	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0
28	13,6	14,8	16,9	18,9	21,6	23,6	27,3	31,4	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3
29	14,3	15,6	17,7	19,8	22,5	24,6	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6
30	14,9	16,3	18,5	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5	36,2	40,3	43,8	48,0	50,9

Таблица VI

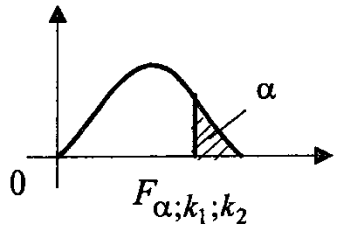
Значения $F_{\alpha,k_1;k_2}$ -критерия Фишера—Снедекора



α=0,05																			
k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	240	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6.59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84

Таблица VI

Значения $F_{\alpha,k_1;k_2}$ -критерия Фишера—Снедекора



α=0,05																			
k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	240	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6.59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84

15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,67	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,55	3,41	3,26	3,18	3,10	3,02	2,93	2,84	2,75
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,46	3,31	3,16	3,08	3,00	2,92	2,83	2,75	2,65
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,37	3,23	3,08	3,00	2,92	2,84	2,75	2,66	2,57
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,30	3,15	3,00	2,92	2,84	2,76	2,67	2,58	2,49
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,23	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,61	2,52	2,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,17	3,03	2,88	2,80	2,72	2,64	2,55	2,46	2,36
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,12	2,98	2,83	2,75	2,67	2,58	2,50	2,40	2,31
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,07	2,93	2,78	2,70	2,62	2,54	2,45	2,35	2,26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,03	2,89	2,74	2,66	2,58	2,49	2,40	2,31	2.21
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	2,99	2,85	2,70	2,62	2,54	2,45	2,36	2,27	2,17
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	2,96	2,81	2,66	2,58	2,50	2,42	2,33	2,23	2,13
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06	2,93	2,78	2,63	2,55	2,47	2,38	2,29	2,20	2,10
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,90	2,75	2,60	2,52	2,44	2,35	2,26	2,17	2,06
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00	2,87	2,73	2,57	2,49	2,41	2,33	2,23	2,14	2,03
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,84	2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,21	2,11	2,01
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,66	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,02	1,92	1,80
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,50	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,84	1,73	1,60
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,34	2,19	2,03	1.95	1,86	1,76	1,66	1,53	1,38
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,18	2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,47	1,32	1,00

k_1 — число степеней свободы для большой дисперсии, k_2 — для меньшей дисперсии.