Уважаемые студенты!

Вам необходимо изучить теоретический материал, рассмотреть решение примеров, ответить на контрольные вопросы.

Ответ присылать на электронную почту до 25. 05

Электронная почта: ***hvastov@rambler.ru***

Лекция

Задачи на составление дифференциальных уравнений

План

1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям
2. Основные понятия и определения
3. Общие и частные решение дифференциального уравнения

1.При решении многих задач математики физике и технике часто не удается установить непосредственную зависимость между искомыми и данными применениями величинами, но зато удается составить уравнения, связывающие независимую переменную, искомую функцию и ее производные. Такое уравнения называется дифференциальным. Решая его, находят зависимость уже между самими переменными.

Дифференциальные уравнения может не содержать в явном виде независимую переменную и искомую функцию, но обязательно должна содержать одну или несколько производных искомой функции.

Например уравнение $y'=2y$; $y'+y'\cos x=enx$; $y''=y^2-3y'$; будут дифференциальными уравнениями. С простейшими дифференциальными уравнениями мы уже встречались при решении задачи об отыскании первообразной функции.

Действительно, если функция $y=f(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, то по определению первообразной $y'=f(x)$.

Это уравнения является простейшим дифференциальным уравнением.

Пусть требуется найти уравнения кривой, проходящей через заданную точку, если известно, угловой коэффициент касательной, проведенной в любой точке кривой равен 2x. Согласно геометрическому смыслу производной $\frac{dy}{dx} = 2x$, откуда $dy=2xdx$, это дифференциальное уравнение.

При изучении производной мы определяем, что скорость движения тела в данный момент равно производной пути во времени, т.е. $S'(t)=V(t)$.

Это простейшие дифференциальные уравнения.

2. Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее независимую переменную x, искомую функцию y и её производные y’;y”;y”’……

Символически дифференциальные уравнения записываются так: $F(x;y;y';y'';\ldots\ldots y^{(n)})=0$.

Например, уравнения $2x+y-3y'=0$; $xydy=(2x+1)dx$; $y''=5x$ являются дифференциальными уравнениями.

Порядком дифференциального уравнения называются порядок наивысшей производной, входящей в данные уравнения.

Например, $xy'+y=0$ - уравнение первого порядка,

$y'''+7y'-3y=0$ - уравнение третьего порядка.

Уравнение первого порядка в общем виде в общем виде записывается следующим образом: $F(x;y;y')=0$

Разрешая это уравнение относительно y’, получим $y'=f(x,y)$.

Это уравнение называется уравнением первого прядка, , разрешенным относительно производной.

Решением дифференциального уравнения называется всякая функция

$y=\mu(x)$, которая обрабатывает данные уравнения в тождество.

Так, например, решением уравнения $y'=-\frac{y}{x}$ является всякая функция вида

$y=\frac{c}{x}$, где C – постоянная.

Заменив в уравнении $y'=-\frac{y}{x}$; y его значением,

получим $(\frac{c}{x})'=-\frac{c/x}{x}$ <——> $-\frac{c}{x2}=-\frac{c}{x2}$

При различных значениях C определяют различные решения уравнения

$y'=-\frac{y}{x}$.

Например, функция $y=\frac{1}{x}$ (c=1); $y=\frac{3}{x}$ (c=3) являются решениями данного уравнения.

Таким образом ,для уравнения $y'=-\frac{y}{x}$ мы рассмотрели как общее решение $y'=-\frac{c}{x}$, где C – произвольная постоянная, так и частные его решения , например $y=\frac{1}{x}$; $y=\frac{3}{x}$, которые получаются из общего решения при различных числовых значениях постоянной C.

3. Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка, называется функция $y=\mu(x;c^1;c^2\ldots.c^{(n)})$, зависящая от -n – производных постоянных $c^1;c^2\ldots.c^{(n)}$, и удовлетворяющая данному уравнению при любых значениях этих постоянных.

Так, общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция y =μ(x; c), содержащая только одну постоянную и удовлетворяющая данному уравнению при любом фиксированном значении постоянной С.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученные из общего решения при фиксированных значениях производных постоянных.

Задача нахождения частного решения y= y(x) удовлетворяющего начальным условиям называется задачей Коши.

В случае дифференциального уравнения первого порядка задача Коши становится так: найти частные решения y=y(x) уравнения y' = f(x;y), удовлетворяющего начальным условиям $y(x^0)= y^0$ или $y/x = x^{0.}$

Пусть, например, требуется найти частные решения уравнения

$y'=-\frac{y}{x}$,удавлитворяющего условию y(2)=3 Общее решение имеет вид

$y'=-\frac{c}{x}$. Подставляя в общее решение начальные условия x=2; y=3, найдем $3= \frac{c}{2}$; c=6. Таким образом, искомым частным решением уравнения является функция $y= \frac{6}{x}$.

С геометрической точки зрения общее решение дифференциального уравнения определяет семейство кривых , называемых интегральными кривыми , а частные решения определяет лишь одну единственную интегральную кривую.

Пример: Найти решение дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx}$ = 2x, удовлетворяющих начальному условию x=1; y=3.

Решение: dy = 2xdx ;

$Y= x^2+c$ - общее решение

3=1+c ; c=2

$Y = x^2+2$ - частное решение

Проверка: $\frac{d(x2+c)}{dx}$ = 2x

$\frac{2xdx}{dx}$ = 2x ; 2x=2x

Контрольные вопросы:

1.Какие задачи приводят к понятию дифференциальных уравнений?

2.Привести примеры дифференциальных уравнений

3.Какие уравнения называются дифференциальными?

4.Что называется решением дифференциального уравнения?

5. В чем заключается задача Коши?

6. Что называется общим решением; частным решением?