Задание

1. Изучите лекцию; запишите все типовые задачи, рассмотренные в лекции.

2. Фотоотчет присылать на электронную почту

С уважением, Хвастова Светлана Ивановна

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721389311 (ватсап). Электронная почта: xvsviv@rambler.ru

Лекция на тему: Понятие о законе больших чисел

Цель занятия: сформировать у обучающихся понятия о Гауссовой функции, ее формуле и графике, о законе больших чисел и умении применять эти формулы к решению задач, используя таблицы.

Задачи занятия:

1) обучающие: повторить способы решения показательных и логарифмических неравенств;

познакомить обучающихся с гауссовой кривой и научить их работе с таблицами приближенных значений для Гауссовой функции;

познакомить обучающихся с законом больших чисел, научить его применению в реальной жизни и обучить методам приближенного вычисления вероятностей $P_n(k)$ наступления k «успехов» в n независимых повторениях одного и того же испытания с двумя исходами при большом количестве испытаний и работе с таблицами приближенных значений для гауссовой функции.

2) развивающие: развивать культуроведческую компетенцию школьников, используя биографии великих математиков Гаусса и Лапласа.

3) воспитывающие: воспитывать интерес к предмету на примере красоты и универсальности некоторых математических моделей реальных явлений жизни.

Уникальность и красота математики состоит в том, что очень многие физические явления реального мира, имеющие совершенно разную природу, могут быть описаны одними и теми же математическими моделями.

Успехи в математике иногда опережали реальные открытия. Например, теория относительности Эйнштейна. Еще никому из людей не приходилось летать со скоростью света, однако четко выверенные математические формулы и модели уже существуют.

Мы работали с той или иной моделью реальности. Как же связаны между собой реальность и модель реальности? Насколько точно наши теоретические представления об окружающем мире соответствуют тому, что происходит на практике? В основе объединения вероятности и статистики лежат два замечательных факта. Один из них – явление ***статистической устойчивости***. Второй состоит в том, что во многих различных по своей природе наблюдениях статистическая устойчивость может быть описана с помощью одной единственной функции.

2) **Функция Гаусса и ее график. Работа с гистограммами на примерах из разных областей жизни.**

Эта функция введена немецким математиком К.Ф. Гауссом (1777-1855).

Карл Фридрих Гаусс — немецкий математик, астроном, геодезист и физик. Для творчества Гаусса характерна органическая связь между теоретической и прикладной математикой, широта проблематики. Труды Гаусса оказали большое влияние на развитие алгебры (доказательство основной теоремы алгебры), теории чисел, дифференциальной геометрии, математической физики, теории электричества и магнетизма, геодезии и многих разделов астрономии.

Гауссова функция задается весьма сложной формулой $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$.

На экран выводится изображение гауссовой кривой.

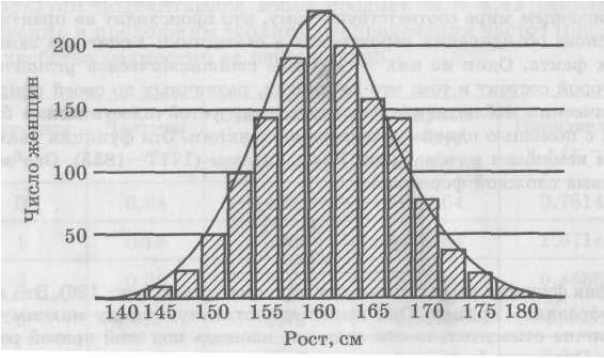
Это «колоколообразная» кривая. Она имеет единственную точку максимума, симметрична относительно оси ординат, площадь под этой кривой равна единице. Она очень быстро асимптотически приближается к оси абсцисс: если оценить площадь под гауссовой кривой на отрезке [-3;3], то получится более 99% всей площади.

Удивительно, что в формуле гауссовой функции одновременно присутствуют два замечательных иррациональных числа: π и e, в первоначальных определениях которых, казалось бы, нет ничего общего. Оказывается, что эти столь различные числа вместе используются при описании многих статистических и вероятностных явлений.

Гауссова кривая появляется при статистической обработке данных. Как мы видели на предыдущих уроках, гистограммы (столбчатые диаграммы) распределения большого объема информации незаменимы в случаях, когда ряд данных состоит из очень большого количества чисел. Если ширина вертикальных столбцов гистограммы достаточно мала, а основания столбцов в объединении дают некоторый промежуток, то сама гистограмма похожа на график некоторой непрерывной функции, заданной на этом промежутке. Иногда такую функцию называют *выравнивающей*

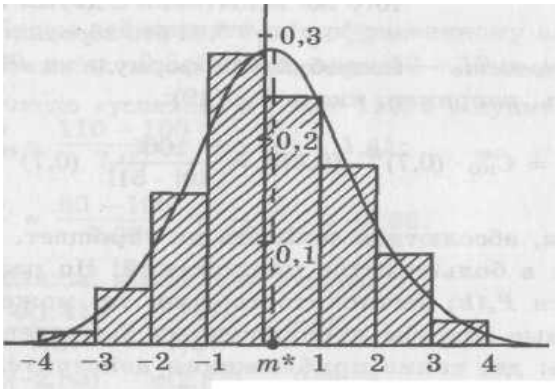
функцией. Например, на рис. 1 представлена гистограмма роста женщин, построенная по выборке, в которой было 1375 женщин.

На экран выводится рисунок 1.



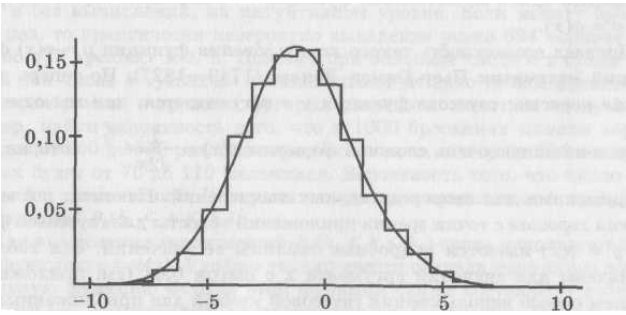
Приведем пример из военного дела. Производилось 500 измерений боковой ошибки при стрельбе с самолета. На графике (рис. 2) по оси абсцисс отложены величины ошибок («левее или правее» цели), а по оси ординат — частоты этих ошибок.

На экран выводится рисунок 2.



Приведем пример из биологии. Измерялся размер 12 000 бобов, и по оси абсцисс откладывались величины отклонений от среднего размера бобов, а по оси ординат — соответствующие частоты (рис. 3).

На экран выводится рисунок 3.



Примеры, как видите, взяты из совершенно различных областей, а графики функций, выравнивающих гистограммы, похожи друг на друга. Оказывается, что такому же закону подчиняется распределение и горошин по весу, и новорожденных младенцев по весу, и частиц газа по скорости движения, и множества других явлений окружающего нас мира. Подобно тому как графики всех парабол получаются с помощью линейных преобразований вдоль координатных осей из одной-единственной параболы $y = x^2$, все эти кривые распределения получаются из одной-единственной кривой, а именно из ***гауссовой кривой***. Ее очень часто называют также *кривой нормального распределения.*

3) **Формула гауссовой функции: причина ее возникновения, особенности.**

Как же возникла эта кривая? В теории вероятностей гауссова кривая возникает при попытке практического использования формулы Бернулли. Теорема Бернулли дает абсолютно точный ответ для вероятности $P_n(k)$ наступления k «успехов» в n независимых повторениях одного и того же испытания с двумя исходами: $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$. Но если мы будем вычислять по этой формуле, например, $P_{100}(49) = C_{100}^{49} \cdot 0{,}7^{49} \cdot 0{,}3^{51}$, то абсолютная точность не упростит, а усложнит нам задачу. Поэтому используются методы приближенного вычисления вероятностей. Оказывается, что в огромном числе различных ситуаций все приближения могут быть произведены с помощью одной-единственной функции – гауссовой функции $y = \varphi(x)$.

Доказал возможность такого использования функции $y = \varphi(x)$ французский математик Пьер Симон Лаплас (1749-1827) - французский астроном, математик, физик, иностранный почетный член

Петербургской АН, автор классических трудов по теории вероятностей и небесной механике, и, наконец, человек, который составил космогоническую гипотезу образования всех тел солнечной системы, называемую его именем и в общих чертах, неизмененную поныне.

4) **Таблица приближенных значений для гауссовой функции. Примеры.**

Для использования столь громоздкой формулы гауссовой функции имеются подробные таблицы ее значений. Они составлены для значений аргумента с шагом 0,01. (см. приложения в конце конспекта занятия)

5). **Алгоритм использования функции Гаусса в приближенных вычислениях**

Для вычисления вероятности $P_n(k)$ нужно:

1)проверить справедливость неравенства $npq \geq 10$;

2)вычислить x_k по формуле $x_k = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$;

3)по таблице значений гауссовой функции вычислить $\varphi(x_k)$;

4)предыдущий результат разделить на $\sqrt{npq}$.

$$P_n(k) = \frac{\varphi(x_k)}{\sqrt{npq}}.$$

Рассмотрим внимательнее неравенство $npq \geq 10$. Так как $q=1-p$, то $pq=p(1-p)$ и наибольшее значение этого квадратичного выражения (относительно p) достигается при $p=0,5$. Наибольшее значение равно 0,25. Значит, $0,25\,n \geq npq \geq 10.$

Поэтому из условия 1) алгоритма следует, что $n \geq 40$. Это значит, что указанный алгоритм дает хорошую точность приближения, когда испытание с двумя исходами независимо повторяется как минимум несколько десятков раз. При меньшем числе повторений точность приближения резко ухудшается.

Задача. Вероятность рождения мальчика примем равной 50%. Найти вероятность того, что среди 200 новорожденных будет 110 мальчиков.

Решение: Будем действовать по предложенному алгоритму. В нашем случае n = 200, p = q = 0,5. Значит, npq = 50 > 10 и $\sqrt{npq} \approx 7{,}07.$ При этом число «успехов» k равно 110.

Тогда: $x_k = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \approx \frac{110-100}{7{,}07} = \frac{10}{7{,}07} \approx 1{,}41.$

Используя таблицы, вычисляем ответ: $P_{200}(110) = \frac{\varphi(1{,}41)}{7{,}07} \approx 0{,}02.$

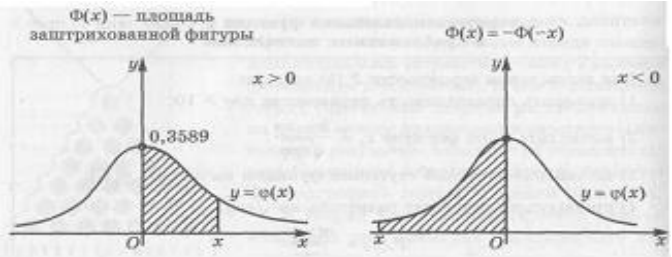
6). **Вероятность $P_n(k_1 \le k \le k_2)$ того, что число «успехов» k в n испытаниях Бернулли находится в пределах от k_1 до k_2.**

Вероятности $P_n(k)$, как правило, весьма малы. Это вполне объяснимо даже и без вычислений, на интуитивном уровне. Если монету бросить 1000 раз, то практически невероятно выпадение ровно 694 «орлов» или именно 427 «решек» и т. п. Поэтому при большом числе n в схеме Бернулли для числа k «успехов» устанавливают не одно точное значение, а некоторые рамки, в пределах которых разрешено меняться числу k. Например, найти вероятность того, что в 1000 бросаниях монеты «орел» выпадет от 500 до 600 раз, или вероятность того, что среди 200 новорожденных будет от 70 до 110 мальчиков. Вероятность того, что число «успехов» k в n испытаниях Бернулли находится в пределах от k_1 до k_2, обозначают так: $P_n(k_1 \le k \le k_2)$

7). Функция $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt.$ Ее геометрический смысл и график.

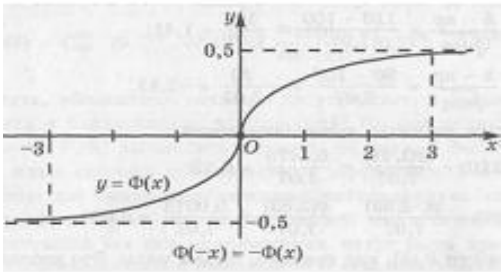
Для вычисления вероятностей $P_n(k_1 \le k \le k_2)$ снова используют гауссову функцию $y = \varphi(x)$. Удобнее только ввести сначала некоторую дополнительную функцию Ф. Для этой функции также составлены таблицы значений на странице 261, а связана она с φ следующим образом. Если аргумент x положителен, то $\Phi(x)$ равно площади под гауссовой кривой на

отрезке от 0 до *x*. Более точно, $\Phi(x)=\int_0^x \varphi(t)\,dt$. Если $x < 0$, то $\Phi(x) = -\Phi(x)$. На экран выводятся следующие графики.



Кроме того, из графиков видно, Φ(0) = 0. Значит, функция Φ нечетна, а ее график симметричен относительно начала координат. Ясно также, что эта функция возрастает на всей прямой. График функции $y=\Phi(x)$ изображен на рисунке ниже.

На экран выводятся график.



8). **Алгоритм использования функции $y=\Phi(x)$ в приближенных вычислениях. Задача.**

Алгоритм решения задач на нахождение $P_n(k_1 \le k \le k_2)$ аналогичен уже рассмотренному для $P_n(k)$. Для вычисления вероятности $P_n(k_1 \le k \le k_2)$ следует:

1. проверить справедливость неравенства $npq \ge 10$;

2. вычислить x_1 и x_2 по формулам $x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}},\ x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}};$

3. по таблице вычислить значения $\Phi(x_1)$ и $\Phi(x_2)$

4. найти разность $\Phi(x_2)-\Phi(x_1)$.

$P_n(k_1 \le k \le k_2)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1)$.

Задача. Политика П. поддерживает в среднем 40% населения. Какова вероятность того, что из 1500 случайно опрошенных людей политика П. поддерживают от 570 до 630 человек?

Решение. Считаем, что опрос 1500 человек происходит независимо и что вероятность поддержки политика П. отдельным респондентом, т. е. вероятность p «успеха», равна 0,4. Тогда

$q=1-p=0,6$ и $npq=1500\cdot 0,4\cdot 0,6=360>10, \sqrt{npq}\approx 19.$ Значит, мы имеем дело с частным случаем схемы Бернулли, в которой число «успехов» k находится в пределах от 570 до 630.

$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{570-1500\cdot 0,4}{19}=-\frac{30}{19}=-1,58;$ $x_2=1,58.$ Поэтому

$$P_{1500}(570\le k\le 630)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1)=\Phi(1,58)-\Phi(-1,58)=2\Phi(1,58)=2\cdot 0,4429\approx 0,886.$$

9). **Анализ и сравнение изученных вероятностей.**

Видим, что значение вероятности в данном случае гораздо больше по значению, чем то, которое мы определяли в предыдущей задаче. Допустим теперь, что мы провели n независимых повторений испытания с двумя исходами и пусть «успех» мы наблюдали равно k раз. Тогда число $\frac{k}{n}$ естественно назвать частотой «успеха». Насколько же частота «успеха» в n испытаниях Бернулли отличается от вероятности p «успеха» в одном испытании? Использование функций φ и Φ позволяет доказать, что при достаточно большом числе n повторений испытаний с двумя исходами числа $\frac{k}{n}$ и p практически совпадают. Об этом говорит один их важнейших законов в теории вероятностей – **закон больших чисел**.

10). **Закон больших чисел.**

Опишем явление **<u>статистической устойчивости</u>**. Допустим, что мы провели n независимых повторений испытания с двумя исходами и пусть «успех» мы наблюдали ровно k раз. Тогда число $\frac{k}{n}$ естественно назвать *частотой* «успеха». Насколько же частота «успеха» в n испытаниях Бернулли отличается от вероятности p «успеха» в одном испытании?

Использование функций φ и Ф позволяет доказать, что при достаточно большом числе n повторений испытания с двумя исходами числа $\frac{k}{n}$ и p практически совпадут. Это убеждает в справедливости одного из важнейших законов теории вероятностей – **<u>закона больших чисел</u>:**

для каждого положительного числа r при неограниченном увеличении числа n независимых повторений испытания с двумя исходами вероятность того, что частота $\frac{k}{n}$ появления «успеха» отличается менее чем на r от вероятности p «успеха» в одном отдельном испытании, стремится к единице.

Использование гауссовых функций **φ** и Ф убедительно подтверждает явление <u>статистической устойчивости</u>: при большом числе независимых повторений одного и того же испытания в неизменных условиях практически достоверно, что частота появления фиксированного случайного события совпадает с некоторым постоянным числом. Это число называют **статистической вероятностью события.**

В частности, если нам неизвестна вероятность случайного события *A,* которое может происходить или не происходить в результате некоторого испытания, то мы можем многократно повторять это испытание и вычислять частоту наступления этого события *A.* При большом числе повторений практически несомненно, что таким образом найденная частота приблизительно будет равна вероятности *P(A)* этого случайного события.

Значения функции Гаусса $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Целые и десятичные доли x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0041	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001
4,0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,1	0,0001338									
4,5	0,0000160									
5,0	0,0000015									

Таблица значений интегральной функции Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$.

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	**0,50**	0,1915	**1,00**	0,3413	**1,50**	0,4332	**2,00**	0,4772	**3,00**	0,49865
0,01	0,0040	**0,51**	0,1950	**1,01**	0,3438	**1,51**	0,4345	**2,02**	0,4783	**3,20**	0,49931
0,02	0,0080	**0,52**	0,1985	**1,02**	0,3461	**1,52**	0,4357	**2,04**	0,4793	**3,40**	0,49966
0,03	0,0120	**0,53**	0,2019	**1,03**	0,3485	**1,53**	0,4370	**2,06**	0,4803	**3,60**	0,499841
0,04	0,0160	**0,54**	0,2054	**1,04**	0,3508	**1,54**	0,4382	**2,08**	0,4812	**3,80**	0,499928
0,05	0,0199	**0,55**	0,2088	**1,05**	0,3531	**1,55**	0,4394	**2,10**	0,4821	**4,00**	0,499968
0,06	0,0239	**0,56**	0,2123	**1,06**	0,3554	**1,56**	0,4406	**2,12**	0,4830	**4,50**	0,499997
0,07	0,0279	**0,57**	0,2157	**1,07**	0,3577	**1,57**	0,4418	**2,14**	0,4838	**5,00**	0,499997
0,08	0,0319	**0,58**	0,2190	**1,08**	0,3599	**1,58**	0,4429	**2,16**	0,4846		
0,09	0,0359	**0,59**	0,2224	**1,09**	0,3621	**1,59**	0,4441	**2,18**	0,4854		
0,10	0,0398	**0,60**	0,2257	**1,10**	0,3643	**1,60**	0,4452	**2,20**	0,4861		
0,11	0,0438	**0,61**	0,2291	**1,11**	0,3665	**1,61**	0,4463	**2,22**	0,4868		
0,12	0,0478	**0,62**	0,2324	**1,12**	0,3686	**1,62**	0,4474	**2,24**	0,4875		
0,13	0,0517	**0,63**	0,2357	**1,13**	0,3708	**1,63**	0,4484	**2,26**	0,4881		
0,14	0,0557	**0,64**	0,2389	**1,14**	0,3729	**1,64**	0,4495	**2,28**	0,4887		
0,15	0,0596	**0,65**	0,2422	**1,15**	0,3749	**1,65**	0,4505	**2,30**	0,4893		
0,16	0,0636	**0,66**	0,2454	**1,16**	0,3770	**1,66**	0,4515	**2,32**	0,4898		
0,17	0,0675	**0,67**	0,2486	**1,17**	0,3790	**1,67**	0,4525	**2,34**	0,4904		
0,18	0,0714	**0,68**	0,2517	**1,18**	0,3810	**1,68**	0,4535	**2,36**	0,4909		
0,19	0,0753	**0,69**	0,2549	**1,19**	0,3830	**1,69**	0,4545	**2,38**	0,4913		
0,20	0,0793	**0,70**	0,2580	**1,20**	0,3849	**1,70**	0,4554	**2,40**	0,4918		
0,21	0,0832	**0,71**	0,2611	**1,21**	0,3869	**1,71**	0,4564	**2,42**	0,4922		
0,22	0,0871	**0,72**	0,2642	**1,22**	0,3883	**1,72**	0,4573	**2,44**	0,4927		
0,23	0,0910	**0,73**	0,2673	**1,23**	0,3907	**1,73**	0,4582	**2,46**	0,4931		
0,24	0,0948	**0,74**	0,2703	**1,24**	0,3925	**1,74**	0,4591	**2,48**	0,4934		
0,25	0,0987	**0,75**	0,2734	**1,25**	0,3944	**1,75**	0,4599	**2,50**	0,4938		
0,26	0,1026	**0,76**	0,2764	**1,26**	0,3962	**1,76**	0,4608	**2,52**	0,4941		
0,27	0,1064	**0,77**	0,2794	**1,27**	0,3980	**1,77**	0,4616	**2,54**	0,4945		
0,28	0,1103	**0,78**	0,2823	**1,28**	0,3997	**1,78**	0,4625	**2,56**	0,4948		
0,29	0,1141	**0,79**	0,2852	**1,29**	0,4015	**1,79**	0,4633	**2,58**	0,4951		
0,30	0,1179	**0,80**	0,2881	**1,30**	0,4032	**1,80**	0,4641	**2,60**	0,4953		
0,31	0,1217	**0,81**	0,2910	**1,31**	0,4049	**1,81**	0,4649	**2,62**	0,4956		
0,32	0,1255	**0,82**	0,2939	**1,32**	0,4066	**1,82**	0,4656	**2,64**	0,4959		
0,33	0,1293	**0,83**	0,2967	**1,33**	0,4082	**1,83**	0,4664	**2,66**	0,4961		
0,34	0,1331	**0,84**	0,2995	**1,34**	0,4099	**1,84**	0,4671	**2,68**	0,4963		
0,35	0,1368	**0,85**	0,3023	**1,35**	0,4115	**1,85**	0,4678	**2,70**	0,4965		
0,36	0,1406	**0,86**	0,3051	**1,36**	0,4131	**1,86**	0,4686	**2,72**	0,4967		
0,37	0,1443	**0,87**	0,3078	**1,37**	0,4147	**1,87**	0,4693	**2,74**	0,4969		
0,38	0,1480	**0,88**	0,3106	**1,38**	0,4162	**1,88**	0,4699	**2,76**	0,4971		
0,39	0,1517	**0,89**	0,3133	**1,39**	0,4177	**1,89**	0,4706	**2,78**	0,4973		
0,40	0,1554	**0,90**	0,3159	**1,40**	0,4192	**1,90**	0,4713	**2,80**	0,4974		
0,41	0,1591	**0,91**	0,3186	**1,41**	0,4207	**1,91**	0,4719	**2,82**	0,4976		
0,42	0,1628	**0,92**	0,3212	**1,42**	0,4222	**1,92**	0,4726	**2,84**	0,4977		
0,43	0,1664	**0,93**	0,3238	**1,43**	0,4236	**1,93**	0,4732	**2,86**	0,4979		
0,44	0,1700	**0,94**	0,3264	**1,44**	0,4251	**1,94**	0,4738	**2,88**	0,4980		
0,45	0,1736	**0,95**	0,3289	**1,45**	0,4265	**1,95**	0,4744	**2,90**	0,4981		
0,46	0,1772	**0,96**	0,3315	**1,46**	0,4279	**1,96**	0,4750	**2,92**	0,4982		
0,47	0,1808	**0,97**	0,3340	**1,47**	0,4292	**1,97**	0,4756	**2,94**	0,4984		
0,48	0,1844	**0,98**	0,3365	**1,48**	0,4306	**1,98**	0,4761	**2,96**	0,4985		
0,49	0,1879	**0,99**	0,3389	**1,49**	0,4319	**1,99**	0,4767	**2,98**	0,4986		