Уважаемые студенты!
Вам необходимо изучить материал лекции, законспектировать материал лекции и ответить на контрольные вопросы.

Фотоотчет конспекта лекции предоставить на электронную почту
hvastov@rambler.ru,
при возникновении вопросов обращаться по телефону 0721098278 (WatsApp).

Лекция
Нахождение площадей криволинейных трапеций

План

1. Понятие интегральной суммы.
2. Определение криволинейной трапеции.
3. Геометрический смысл определенного интеграла.
4. Вычисление площадей плоских фигур.

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную на промежутке $a \le x \le b.$ разобьем этот отрезок на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_{21} < x_3 ... < x_n = b.$ Выберем на каждом из полученных частичных отрезков $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1,2,3,..., n$ произвольным образом точку и обозначим их c_i, а длину отрезков через Δx_i и составим сумму: $f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + ... + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ называется интегральной суммой функции $f(x)$.

Геометрически каждое слагаемое интегральной суммы равно площади прямоугольника с основанием Δx_i и высотой $f(c_i)$, а вся сумма равна площади «ступенчатой фигуры», получающейся объединением всех указанных выше прямоугольников. Очевидно, что при всевозможных разбиениях отрезка $a \le x \le b$ на части получим различные интегральные суммы, а следовательно, различные «ступенчатой фигуры». Будем увеличивать число точек разбиения так, чтобы длина наибольшего из отрезков $[x_{i-1}; x_i]$ стремилась к нулю. Во многих случаях при таком разбиении интегральная сумма будет стремиться к некоторому конечному пределу, не зависящему ни от способа, каким выбираются точки деления x_i, ни то того, как выбираются промежуточные точки c_i.

Этот предел и называется определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $a \le x \le b.$

Если интегрируемая на отрезке $a \le x \le b.$ функция $f(x)$ неотрицательна, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = b$, т.е.

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

В этом заключается геометрический смысл определенного интеграла.

Понятие определенного интеграла широко применяется для вычисления различных геометрических и физических величин.

Площади плоских фигур вычисляются по формуле $S = \int_a^b f(x)dx$.

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями гиперболой $xy = 1$, осью Ох и прямыми х=1 и х=е.

Решение

$$S = \int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln|x| \,|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1; S = 1$$ кв.ед.

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, осью Ох и прямыми х=–1 и х=2.

Решение

Выполним построение фигуры:

Применяя формулу, получим $S = \int_{-1}^{2} x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \,|_{-1}^{2} = \frac{1}{3}(8 - (-1)) = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3, S = 3$ кв.ед.

Задачи:

Сделайте чертеж и вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1. $y = 8x - x^2 - 7$ и осью Ох;
2. $y = x^3 - 1, y = 0, x = 0;$
3. $y = x^2 - 3x - 4$ и осью Ох;
4. $y = 5x - x^2 + 6$ и осью Ох;
5. $y = x^2 - 6x + 8$ и осью Ох;
6. $y = x^2 \quad y = x + 2.$

Вычисление площадей плоских фигур

Одним из важнейших применений определенного интеграла есть вычисления площадей.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Если на отрезке $[a,b]$ функция $f(x) \geq 0$, то согласно формуле

$$S = \int_a^b f(x)\, dx$$

(1) можно найти площадь криволинейной трапеции, изображенной на рисунке 1.

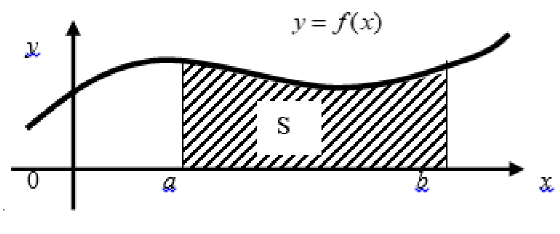

Рисунок 1 – Площадь криволинейной трапеции

2. Если $f(x) \leq 0$ на отрезке $[a;b]$, то криволинейная трапеция, ограниченная кривой $f(x)$, отрезком $[a;b]$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, будет

расположена ниже оси $0x$. Определенный интеграл $S = \int_a^b f(x)\,dx$ в этом случае будет ≤ 0, поэтому $S = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|$. (2)

3. Если площадь S ограничена двумя функциями $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, причем $\varphi(x) \leq f(x)$ для $x \in [a, b]$, то $S = \int_a^b \left(f(x) - \varphi(x) \right) dx$. (3)

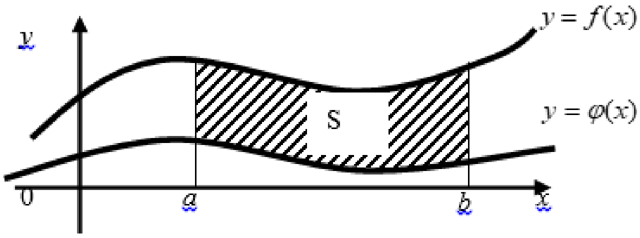

Рисунок 2– Площадь S ограничена двумя функциями

Пример: Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $f(x) = x^2$ и $g(x) = 27 - 2x^2$.

Решение

Для того, чтобы начертить рисунок 3, необходимо найти координаты точки пересечения кривых $f(x)$ и $g(x)$, в которых $f(x) = g(x)$:

$$x^2 = 27 - 2x^2; \quad 3x^2 = 27; \quad x^2 = 9; \quad x = \pm 3.$$

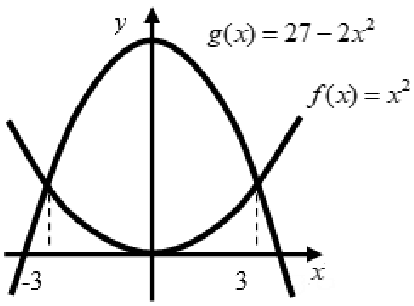

Рисунок 3 – Схематический рисунок к задаче

Поскольку функции $f(x)$ и $g(x)$ четные, можно рассмотреть отрезок $[0;3]$, а площадь удвоить.

Тогда $$S_{иск} = 2\left(\int_0^3 g(x)\,dx - \int_0^3 f(x)\,dx\right) = 2\int_0^3 (g(x) - f(x))\,dx;$$

$$S_{иск} = 2\int_0^3 (27 - 3x^2)\,dx = 54x\Big|_0^3 - 6\frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = 54(3-0) - 2(3^2 - 0) = 108$$ кв. ед.

Контрольные вопросы:

1. Что такое определенный интеграл?

2. Перечислите основные свойства определенного интеграла?

3. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?

4. Напишите формулу для определения площади плоской фигуры с помощью определенного интеграла.