УВАЖАЕМЫЕ СТУДЕНТЫ! Изучите и законспектируйте тезисно новый теоретический материал. Записать все задачи из лекции в конспект.

Результаты работы, фотоотчет, предоставить преподавателю на e-mail: xvsviv@rambler.ru в трехдневный срок с момента получения задания.

При возникновении вопросов по приведенному материалу обращаться по следующим номерам телефонов:072-138-93-11.

ВНИМАНИЕ!!! При отправке работы, не забывайте указывать ФИО студента, наименование дисциплины, дата проведения занятия (по расписанию).

Лекция на тему: Классическое определение вероятности, теорема о сумме вероятностей

Наблюдая различные явления, можно заметить, что существует два типа связей между условиями S и наступлением или ненаступлением некоторого события *A*. В одних случаях осуществление комплекса условий S (испытание) непременно вызывает событие *A*. Так, например, материальная точка массой m_0 под воздействием силы *F* (условие *S)* приобретает ускорение $a = F/m_0$ (событие *A).* В других случаях многократное повторение испытания может привести или не привести к появлению события А. Такие события принято называть ***случайными:*** к ним можно отнести появление в кабинете врача больного с данной болезнью, выпадение определенной стороны монеты при ее бросании и др.

Не следует думать о случайных явлениях как о беспричинных, ничем не обусловленных. Известно, что многие явления связаны между собой, отдельное явление представляет следствие какого-то другого и само служит причиной последующего. Однако проследить количественно эту связь между условиями и событием часто затруднительно или даже невозможно. Так, при бросании игральной кости (однородный кубик с пронумерованными шестью гранями: 1, 2, 3, 4, 5 и 6) окончательное положение кубика зависит от движения руки в момент бросания, сопротивления воздуха, положения кубика

при попадании на поверхность, особенности поверхности, на которую упал кубик, и других факторов, которые в отдельности учесть невозможно.

В быту применительно к таким *случайным событиям* употребляют слова «возможно», «вероятно», «маловероятно», «невероятно». В некоторых случаях такая оценка больше характеризует желание говорящего, чем истинную степень возможности или невозможности события. Однако и случайные события, если их число достаточно велико, подчиняются определенным закономерностям. Количественная оценка закономерностей, относящихся к случайным событиям, дается в разделе математики, называемом *теорией вероятностей.*

Теория вероятностей изучает закономерности, присущие массовым (статистическим) случайным событиям.

Отдельные исторические факты, «неожиданности», «катастрофы» являются единичными, как бы неповторимыми, событиями, и количественные вероятностные суждения относительно них сделать невозможно. Исторически теория вероятностей появилась в связи с попытками подсчета возможности различных исходов в азартных играх. В настоящее же время она применяется в науке, в том числе биологии и медицине, для оценки вероятности практически важных событий. От игр остались лишь наглядные примеры, которые удобно использовать для иллюстрации теоретических положений.

Статистическое определение вероятности. Вероятность *P(A) в* теории вероятностей выступает как числовая характеристика степени возможности появления какого-либо определенного случайного события А при многократном повторении испытаний.

Допустим, при 1000 бросаний игральной кости цифра 4 выпадает 160 раз. Отношение 160/1000 = 0,16 показывает относительную частоту выпадания цифры 4 в данной серии испытаний. В более общем случае, когда случайное событие А происходит *m* раз в серии *n* независимых испытаний, ***относительной частотой события*** в данной серии испытаний или просто частотой события А называют отношение

$$P^*(A) = \frac{m}{n}. \qquad (1)$$

При большом числе испытаний частота события примерно постоянна: увеличение числа испытаний уменьшает колебание частоты события около постоянной величины.

Вероятностью случайного события назовем предел, к которому стремится частота события при неограниченном увеличении числа испытаний:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}. \qquad (2)$$

Естественно, что никто и никогда не сможет проделать неограниченное число испытаний для того, чтобы определить вероятность. В этом нет и надобности. Практически за вероятность [см. (2)] можно принять относительную частоту события при большом числе испытаний. Так, например, из статистических закономерностей рождения, установленных за много лет наблюдений, вероятность того события, что новорожденный будет мальчиком, оценивают в 0,515.

Классическое определение вероятности. Если при испытаниях нет каких-либо причин, вследствие которых одно случайное событие появлялось бы чаще других ***(равновозможные события),*** можно определить вероятность исходя из теоретических соображений. Например, выясним в случае бросания монеты частоту выпадания герба (событие *A)*. Разными экспериментаторами при нескольких тысячах испытаний было показано, что относительная частота такого события принимает значения, близкие к 0,5. Учитывая, что появление герба и противоположной стороны монеты (событие *B)* являются событиями равновозможными, если монета симметрична, суждение $P(A) = P(B) =$ 0,5 можно было бы сделать и без определения частоты этих событий. На основе понятия «равновозможности» событий формулируется другое определение вероятности.

Допустим, что в результате испытания должно произойти только одно из n равновозможных несовместных событий ***(несовместными***

называют события, если их одновременное осуществление невозможно). Пусть рассматриваемое событие *A* происходит в *m* случаях, которые называются благоприятствующими А, и не происходит при остальных *n* - *m,* неблагоприятствующих *A.* Тогда ***вероятностью можно назвать отношение благоприятствующих случаев к общему числу равновозможных несовместных событий:***

$$P(A) = m/n\ . \qquad (3)$$

Это *классическое определение вероятности.*

Рассмотрим несколько примеров.

1. В урне находится 40 шаров: 10 черных и 30 белых. Найти вероятность того, что вынутый наугад один шар будет черным.

Число благоприятствующих случаев равно числу черных шаров в урне: $m = 10$. Общее число равновозможных событий (вынимание одного шара) равно полному числу шаров в урне: $n = 40$. Эти события несовместны, так как вынимается один и только один шар. По формуле (2.3) имеем:

$P(A) = 10/40 = 1/4$.

2. Найти вероятность выпадания четного числа при бросании игральной кости.

При бросании кости реализуются шесть равновозможных несовместных событий: появление одной цифры 1, 2, 3, 4, 5 или 6, т. е. $n = 6$. Благоприятствующими случаями являются выпадания одной из цифр 2, 4 или 6: $m = 3$. Искомая вероятность:

$P(A) = m/n – 3/6 = 1/2.$

Как видно из определений вероятности события (2) и (3), для всех событий

$$0 \le P(A) \le 1.$$

События, которые при данных испытаниях не могут произойти, называются невозможными: их вероятность равна нулю.

Так, например, невозможно из урны с белыми и черными шарами вытащить красный шар, невозможно на игральной кости получить цифру 7.

***Событие, которое при данном испытании обязательно произойдет, называется достоверным, его вероятность равна* 1.**

Примером достоверного события является извлечение белого шара из урны, в которой находятся только белые шары.

В ряде случаев вычислить вероятность события оказывается проще, если представить его в виде комбинации более простых событий. Этой цели служат некоторые теоремы теории вероятностей.

Теорема сложения вероятностей: ***вероятность появления одного (безразлично какого) события из нескольких несовместных событий равна сумме их вероятностей.*** Для двух несовместных событий

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B). \qquad (4)$$

Докажем эту теорему. Пусть n — общее число испытаний, m_1 — число случаев, благоприятствующих событию А, m_2 — число случаев, благоприятствующих событию B. Число случаев, благоприятствующих наступлению либо события A, либо события B, равно $m_1 + m_2$. Тогда $P(A$ или $B) = (m_1 + m_2)/n = m_1/n + m_2/n$. Отсюда, учитывая (3), имеем

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B).$$

* Найти вероятность выпадания 1 или 6 при бросании игральной кости.

События A (выпадание 1) и B (выпадание 6) являются равновозможными: $P(A) = P(B) = 1/6$, поэтому из (2.4) находим $P(A$ или $B) = 1/6 + 1/6 = 1/3$.

Сложение вероятностей справедливо не только для двух, но и для любого числа несовместных событий.

* В урне находится 50 шаров: 10 белых, 20 черных, 5 красных и 15 синих. Найти вероятность появления белого, или черного, или красного шара при однократной операции изъятия шара из урны.

Вероятность вынимания белого шара (событие A) равна $P(A) = 10/50 = 1/5$, черного шара (событие B) — $P(B) = 20/50 = 2/5$ и красного (событие С) — $P(C) = 5/50 = 1/10$. Отсюда по формуле сложения вероятностей получим $P(A$ или B или С) $= P(A) + P(B) + P(C) = 1/5 + 2/5 + + 1/10 = 7/10$.

Если два события единственно возможны и несовместны, то их называют противоположными.

Такие события принято обозначать, например, A и $\overline{A}$.

Сумма вероятностей двух противоположных событий, как следует из теоремы сложения вероятностей, равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \qquad \textbf{(5)}$$

*Проиллюстрируем справедливость (5) на предыдущем примере. Пусть вынимание белого, или черного, или красного шара будет событием A_1, $P(A_1) = 7/10$. Противоположным событием $\overline{A}_1$ является доставание синего шара. Так как синих шаров 15, а общее количество шаров 50, то получаем $P(\overline{A}_1) = 15/50 = 3/10$ и $P(A_1) + P(\overline{A}_1) = 7/10 + 3/10 = = 1$.

*В урне находятся белые, черные и красные шары. Вероятность доставания черного или красного шара равна 0,4. Найти вероятность доставания из урны белого шара.

Обозначим A событие вынимания черного или красного шара, $P(A) = 0{,}4$; противоположным событием $\overline{A}$ будет изъятие белого шара, тогда на основании (2.5) вероятность этого события $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

Систему событий (A_1, A_2, ... A_k) называют полной, если при испытаниях наступит одно и только одно из этих событий. Сумма вероятностей событий, образующих полную систему, равна единице.

* В урне имеется 40 шаров: 20 белых, 15 черных и 5 красных. Вероятность появления белого шара (событие A) равна $P(A) = 20/40 = 1/2$, для черного шара (событие B) — $P(B) = 15/40 = 3/8$ и для красного шара (событие C) — $P(C) = 5/40 = 1/8$. В этом случае система событий A_1, A_2, A_3 является полной; можно убедиться, что $P(A) + P(B) + P(C) = 1/2 + 3/8 + + 1/8 = 1$.

Теорема умножения вероятностей: ***вероятность совместного появления независимых событий равна произведению их вероятностей.*** Для двух событий

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \bullet P(B). \quad (6)$$

Докажем эту теорему. Так как события A и B независимы, то каждому из m_1 случаев, благоприятствующих A, соответствуют m_2 случаев, благоприятствующих B. Таким образом, общее число случаев, благоприятствующих совместному появлению событий A и B, равно $m_1 m_2$.

Аналогично, общее число равновозможных событий равно $n_1 n_2$, где n_1 и n_2 — числа равновозможных событий соответственно для A и B. Имеем

$$P(A \text{ и } B) = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = P(A) \cdot P(B). \quad \textbf{(7)}$$

* В одной урне находится 5 черных и 10 белых шаров, в другой 3 черных и 17 белых. Найти вероятность того, что при первом вынимании шаров из каждой урны оба шара окажутся:

1) черными; 2) белыми; 3) в первой урне будет вынут черный шар, а во второй — белый; 4) в первой урне будет вынут белый шар, а во второй — черный.

Вероятность вытаскивания черного шара из первой урны (событие A) равна $P(A)$ =

= 5/15 = 1/3, черного шара из второй урны (событие B) — $P(B)$ = 3/20, белого шара из первой урны (событие A') — $P(A')$ = 10/15 = 2/3 и белого шара из первой урны (событие B') — $P(B')$ = 17/20. Находим вероятность совместного появления двух независимых событий по формуле (2.6):

1) $P(A \text{ и } B) = P(A) \bullet P(B)$ = (1/3) (3/20) = 3/60 — оба шара черные;

2) $P(A' \text{ и } B') = P(A') \bullet P(B')$ = (2/3) (17/20) = 17/30 — оба шара белые;

3) $P(A' \text{ и } B') = P(A) \bullet P(B')$ = (1/3) (17/20)= 17/60 — в первой урне будет вынут черный шар, а во второй — белый;

4) $P(A' \text{ и } B) = P(A') \bullet P(B)$ = (2/3) (3/20) = 1/10 — в первой урне будет вынут белый шар, а во второй — черный.

Все четыре возможных случая A и B, A' и B', A и B', A' и B образуют полную систему событий, поэтому

$P(A \text{ и } B) + P(A' \text{ и } B') + P(A \text{ и } B') + P(A' \text{ и } B)$ = 3/60 + 17/30 + 17/60 + 1/10 = 1.

* Найти вероятность того, что в семье с тремя детьми все трое сыновья. Считать, что вероятность рождения мальчика равна **0,515** и по каждого последующего ребенка не зависит от пола предыдущих детей.

По теореме умножения вероятностей, $P(A \text{ и } B \text{ и } C)$ = 0,515 • 0,515 • 0,515 ≈ 0,14.

Теорема умножения вероятностей усложняется, если определяется вероятность события, состоящего из совместного появления двух зависимых между собой событий. В том случае, когда событие В

выполняется при условии, что событие A имело место, вероятность совместного появления двух этих событий равна

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \bullet P(B/A), \qquad \textbf{(8)}$$

где $P(B/A)$ — *условная вероятность,* т. е. вероятность события B при условии, что событие A состоялось.

* В урне 5 шаров: 3 белых и 2 черных. Найти вероятность того, что последовательно один за другим будут вынуты черный и белый шары.

Вероятность того, что первым будет изъят черный шар (событие A), равна $P(A) = m/n = 2/5$. После удаления черного шара в урне остается 4 шара: 3 белых и 1 черный. В этом случае вероятность вынимания белого шара (событие B после выполнения события A) равна $P(B/A) = 3/4$. Используя (2.8), получаем $P(A \text{ и } B) = (2/5) \bullet (3/4) = 3/10$.