Задание:

- Повторить теорию;
- Разобрать примеры решения;
- Построить графики для функций из предыдущей лекции;
- По вопросам обращаться 072-1098278 или hvastov@rambler.ru
- Фотоотчёт прислать в течении 3 дней со дня получения задания на hvastov@rambler.ru

Лекция

Тема: Применение производной к исследованию функций. Общая схема исследования функции. Построение графиков.

Цель: Научиться строить графики функций

План.

1. Применение производной к исследованию функций.
2. Промежутки монотонности функции (промежутки возрастания и убывания).
3. Необходимый признак возрастания (убывания) функции.
4. Правило нахождения интервалов монотонности функции f(x).
5. Точки минимума.
6. Точки максимума.
7. Точки экстремума функции.
8. План исследования функции и построения ее графика

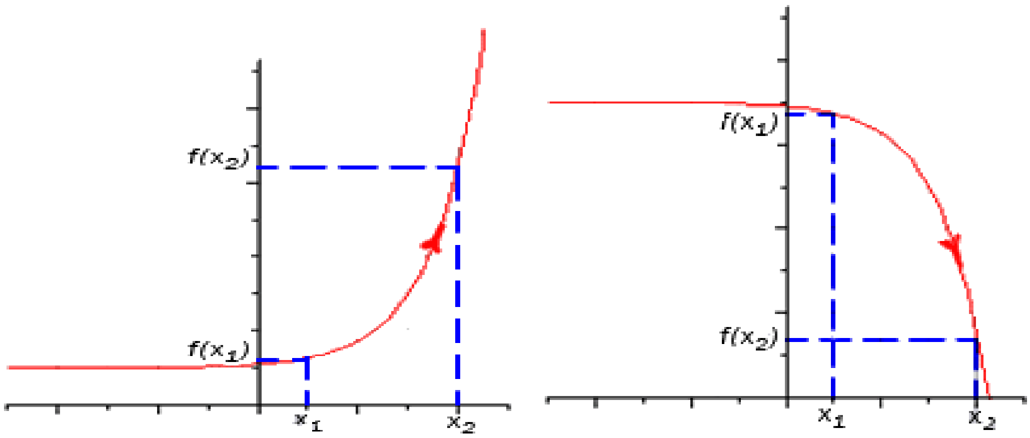
Понятие производной – одно из важнейших в математике. С помощью производной учитывая её механический смысл и геометрический смысл, можно решать самые разнообразные задачи, относящиеся к любой области человеческой деятельности. В частности, с помощью производных стало возможным подробное исследование функций, что позволило очень точно строить их графики, находить их наибольшие и наименьшие значения и т. д.

Одной из основных задач, возникающих при исследовании функции, является нахождение промежутков монотонности функции (промежутков возрастания и убывания).

Такой анализ легко сделать с помощью производной.

Но прежде чем приступить к исследованию функций на монотонность вспомним, какие функции называются возрастающими (убывающими).

Функция y=f(x) называется возрастающей в некотором интервале, если в точках этого интервала большему значению аргумента соответствует большее значение функции, и убывающей, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

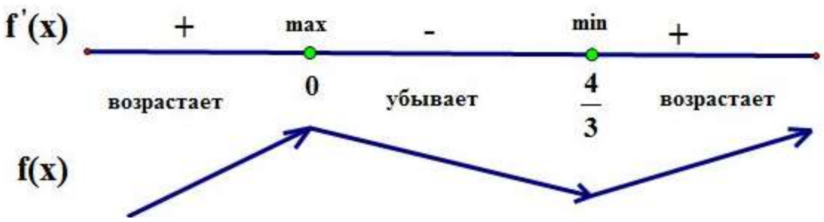


Необходимый признак возрастания (убывания) функции.

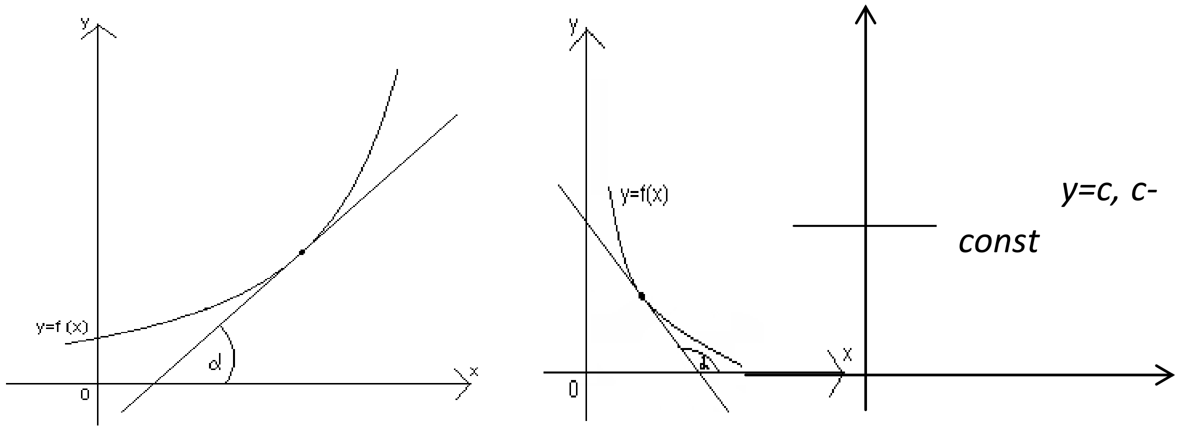
Теорема 1. Если дифференцируемая функция y=f(x) возрастает (убывает) в данном интервале, то производная этой функции не отрицательна (не положительна) в этом интервале.

Обратное заключение также справедливо, оно выражается следующей теоремой.

Теорема 2. Если производная функции y=f(x) отрицательна (положительна) на некотором интервале, то функция в этом интервале монотонно возрастает (монотонно убывает).



Таким образом



функция возрастает,

функция убывает,

функция постоянна

α-острый угол (I четв.), α-тупой угол (II четв.), α=0,

$tg\alpha > 0,\quad tg\alpha < 0,\quad tg\alpha = 0,$

$f'(x) > 0.\quad f'(x) < 0.\quad f'(x) = 0.$

Сформулируем правило нахождения интервалов монотонности функции f(x).

1. Находим область определения функции f(x).
2. Вычисляем производную f'(x) данной функции.
3. Находим точки, в которых f'(x)=0 или не существует. Эти точки называются критическими для функции f(x).
4. Делим область определения функции этими точками на интервалы. Они являются интервалами монотонности.
5. Исследуем знак f'(x) на каждом интервале. Если f'(x)›0, то на этом интервале f(x) возрастает; если f'(x)‹0, то на таком интервале функция f(x) убывает.

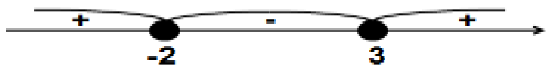
Пример №1. Найти промежутки монотонности функции $y=2x^3-3x^2-36x+5$.

1. Область определения: R. Функция непрерывна.
2. Вычисляем производную : $y'=6x^2-6x-36$.
3. Находим критические точки: y'=0.

$x^2-x-6=0$

$D=1-4\cdot(-6)\cdot1=1+24=25$ $x_1=-2$, $x_2=3$

4. Делим область определения на интервалы:



5. Функция возрастает при $x\epsilon(-\infty;-2]\cup[3;+\infty)$, функция убывает при $x\epsilon[-2;3]$.

Пример №2. Найти промежутки монотонности функции $y=x^3-3x^2$.

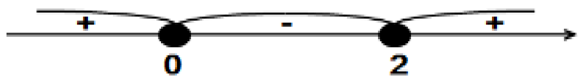
1. Область определения: R. Функция непрерывна.
2. Вычисляем производную : $y'=3x^2-6x$.
3. Находим критические точки: $y'=0$.

$x^2 - 2x=0$

$x(x -2)=0$

$x_1=0$ и $x_2=2$

4. Делим область определения на интервалы:



5. Функция возрастает при $x\epsilon(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$, функция убывает при $x\epsilon[0;2]$.

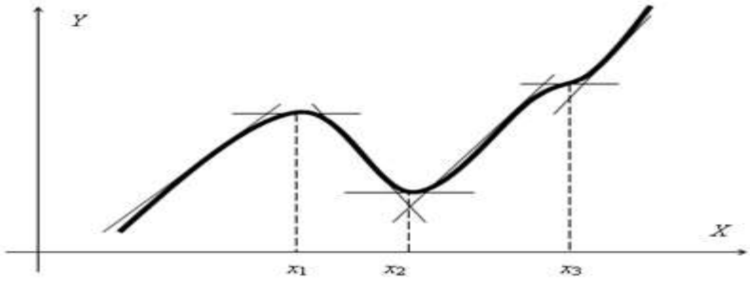
Но помимо монотонности функций с помощью первой производной можно ещё определить экстремумы функций (точки максимума/минимума).

Сначала введём необходимые определения и понятия.

Опр. 1. Точку $x=x_0$ называют точкой минимума функции $y=f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x)\geq f(x_0)$.

Опр. 2. Точку $x=x_0$ называют точкой максимума функции $y=f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x)\leq f(x_0)$.

Теорема 3. Если функция $y=f(x)$ имеет экстремум в точке $x=x_0$, то в этой точке производная функции или равна нулю, или не существует.



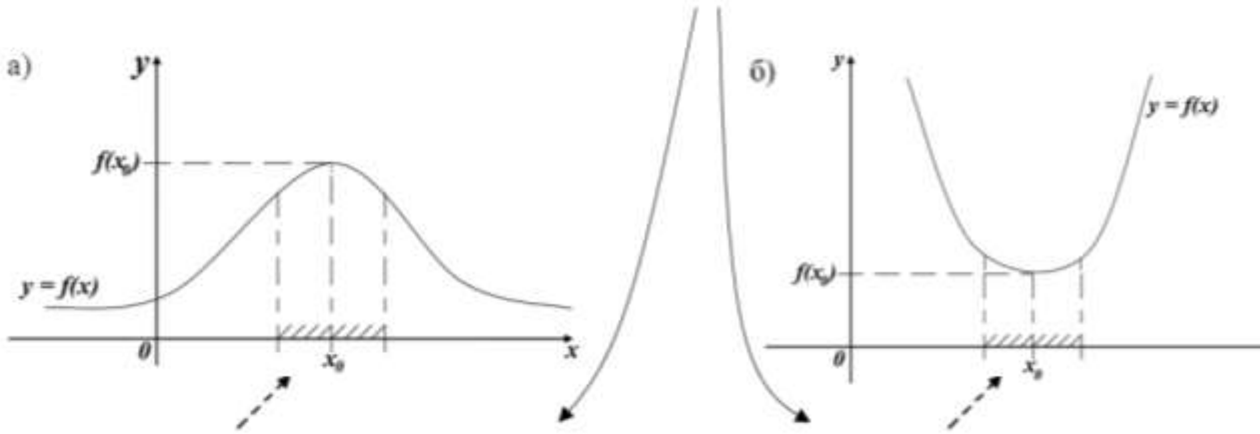
Рассмотрим ещё достаточный признак существования экстремумов функции.

Теорема 4. Если производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак, то точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$.

Если производная меняет знак с + на –, то точка будет являться точкой максимума,

если с – на +, то точка будет точкой минимума.

Точка экстремума



Точка максимума

для всех x, $f(x) \geq f(x_0)$

Точка минимума

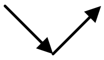
для всех x, $f(x) \leq f(x_0)$

Теорема.

1. $f'(x)=0$, x_0 - критическая точка

слева от x_0 $f'(x) < 0$

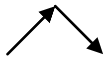
справа от x_0 $f'(x) > 0$



x_0 - точка минимума

слева от x_0 $f'(x) > 0$

справа от x_0 $f'(x) < 0$



x_0 - точка максимума

Рассмотрим теперь на примерах исследование функции на экстремумы.

Пример №3. Найти экстремумы функции y=-2x³-3x²+12x-4.

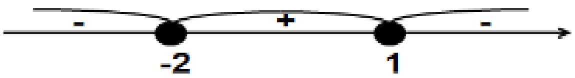
1. Область определения: R. Функция непрерывна.
2. Вычисляем производную : y'=-6x² - 6x + 12.
3. Находим критические точки: y'=0.

x² + x - 2=0

D=1-4·1·(-2)=1+8=9

x_1=-2 и x_2=1

4. Делим область определения на интервалы:



5. Функция возрастает при xϵ(-∞;0]υ[2;+∞), функция убывает при xϵ[0;2].
6. Видно, что в точке x=-2 знак производной меняется с минуса на плюс. Поэтому критическая точка x=-2 – точка минимума. Найдём минимум функции y_{min}=-24. В точке x=1 знак меняется с плюса на минус. Поэтому критическая точка x=1 – точка максимума. Найдём максимум функции: y_{max}=3.

Таким образом

Применение производной	Алгоритм
I. Нахождение интервалов монотонности функции $y = f(x)$	1. Вычислить $f'(x)$ данной функции $f(x)$. 2. Найти критические точки, для

	этого решить уравнение $f'(x)=0$. 3. Критическими точками разбить область определения на интервалы. 4. На каждом из интервалов определяем знак производной. Для этого берем произвольное число из рассматриваемого интервала и подставляем в производную функции. По знаку ответа определяем знак производной. 5. По знаку производной делаем вывод о возрастании, убывании функции.
I. Исследование функции на экстремум	1. Найти производную функции $f'(x)$. 2. Решить уравнение $f'(x)=0$ и найти критические точки. 3. Критическими точками разбить область определения на интервалы. 4. Исследовать знак производной в некоторой окрестности каждой критической точки. 5. а) если при переходе через т. x_0 производная меняет знак с «+» на «-», x_0 - точка максимума; б) если при переходе через т. x_0 производная меняет знак с «-» на «+», то т. x_0 - точка минимума.

План исследования функции и построения ее графика.

1. Область определения.

2. Производная.

3. Критические точки.

4. Знаки производной, промежутки монотонности.

5. Экстремумы функции

6. График.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение возрастающей (убывающей) функции.
2. Назовите теоремы о возрастании (убывании) функции.
3. Что называется точкой минимума (максимума) функции.
4. Что называется критической точкой.
5. Достаточные условия экстремума функции.
6. Алгоритм исследования функции на монотонность и экстремумы.
7. Алгоритм исследования функции.

На прошлой лекции вы находили интервалы возрастания и убывания функции, теперь постройте графикифункций:

1. $y = x^2 - 4x + 4$**.** $\left[\downarrow \text{при } x \in (-\infty; 2); \uparrow \text{при } x \in (2; +\infty)\right]$

2. $y = 6 - 3x^2 - x^3$**.** $\left[\downarrow \text{при } x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty); \uparrow \text{при } x \in (-2; 0)\right]$

3. $y = x^4 - 2x^2$**.** $\left[\downarrow \text{при } x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1); \uparrow \text{при } x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)\right]$

4. $y = x^3 - 3x + 4$**.**