Задание

1. Ознакомиться с теоретический материалом темы, законспектировать, ответить на контрольные вопросы. По рисунку 4 выполнить графическое изображение маршрута, цепи, простой цепи, простого цикла заданных в примере в виде списка вершин и ребер.

2. Фотоотчет и сообщение присылать на электронную почту

С уважением, Хвастова Светлана Ивановна

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721389311 (ватсап). Электронная почта: xvsviv@rambler.ru

Лекция на тему: «Связные компоненты графов. Расстояния. Диаметр, радиус и центр графа. Протяжённости»

Цель: выучить компоненты графов и как их определять.

План

1. Связные компоненты графов.
2. Расстояния
3. Диаметр, радиус и центр графа. Протяжённости.

Связные компоненты графов

Определение. Вершины v_m и v_n называются связанными, если существует маршрут M с началом v_m и концом v_n. Наоборот, маршрут M с началом v_m и концом v_n называется связывающим эти вершины.

Очевидно, что при существовании маршрута M должен также существовать маршрут M^{-1} с началом v_n и концом v_m, в котором рёбра идут в противоположном порядке. Можно показать, что любые две связанные маршрутом M вершины можно связать маршрутом M^*, являющимся простой цепью, состоящей из участков маршрута M.

Если вершина v_m связана с какой-то вершиной v_m маршрутом M, то она, естественно связана с собой маршрутом, состоящим из маршрутов M и M^{-1}.

Более того, принято считать, что изолированная вершина также связана сама с собой, то есть отношение связности, заданное на множестве вершин данного графа V рефлексивно. Оно также симметрично и транзитивно, а поэтому является отношением эквивалентности. Тогда оно порождает разбиение множества V на непересекающиеся подмножества такие, что вершины одного подмножества V_i связаны между собой и не связаны с вершинами другого подмножества V_j. Это, в свою очередь, означает, что граф может быть разложен в прямую сумму подграфов: $G = \cup G_i$.

Определение. Граф называется связным, если все его вершины связаны между собой.

Поэтому все подграфы связного графа G связны и называются связными компонентами графа G.

Расстояния.

Пусть $G(V,E)-$ связный неориентированный граф, v_m, v_n –любые две его вершины. Тогда существует связывающая их простая цепь $M(e_1,\ldots,e_k)$. Если количество этих рёбер k - не минимальное из возможных, существует цепь $M'(e'_1,\ldots,e'_l)$, причём $l < k$.

Штрихи в обозначении используются, потому что не обязательно рёбра под одинаковыми индексами будут совпадать.

Если же и l не минимально, то найдётся связывающая эти вершины цепь M'' с ещё меньшим количеством рёбер и так далее. Однако этот процесс не бесконечен, его можно повторить не более, чем k раз. Тогда существует цепь $\tilde{M}(\tilde{e}_1,\ldots,\tilde{e}_p)$ связывающая вершины v_m и v_n с минимальным количеством рёбер p.

<u>Определение.</u> Минимальная длина простой цепи с началом в вершине v_m и концом в вершине v_n называется *расстоянием* между этими вершинами. Обозначается: $d(v_m, v_n)$.

Расстояние $d(v,v)$ между любой вершиной и ею самой равно 0. Ему соответствует нулевой маршрут, не содержащий рёбер. Для любой пары различных вершин v_m и v_n выполняется $d(v_m,v_n)>0$, так как связывающая их цепь состоит хотя бы из одного ребра. Вообще, расстояние d удовлетворяет аксиомам метрики:

1) $d(v_m,v_n)\geq 0$, причём $d(v_m,v_n)=0$ тогда и только тогда, когда $v_m=v_n$;

2) $d(v_m,v_n)=d(v_n,v_m)$.

Также для расстояния d выполняется неравенство треугольника: для любых трёх вершин v_m,v_n,v_p выполняется неравенство: $d(v_m,v_n)+d(v_n,v_p)\geq d(v_m,v_p)$.

Это позволяет, для простоты рассуждений, измерять расстояние между вершинами по числу рёбер простой цепи, соединяющей их (тем более, что геометрические характеристики рёбер мы не учитываем)..

Диаметр, радиус и центр графа. Протяжённости.

Определение. *Диаметром* конечного графа G называется наибольшее из расстояний между парой его вершин: $d(G)=\max\limits_{v_m,v_n\in G} d(v_m,v_n)$.

Кратчайшие простые цепи, связывающие две вершины графа с максимальным расстоянием между ними, называются *диаметральными простыми цепями*.

Пусть v_0 - рассматриваемая вершина данного графа, а v – произвольная вершина графа. *Максимальным удалением* в графе G от фиксированной вершины v_0 называется величина $r(v_0)=\max d(v,v_0)$.

Определение. Вершина v_0 называется *центром графа* G, если максимальное удаление от неё до остальных вершин графа принимает минимальное значение: $r(v_0)=\min\limits_{v\in G} r(v,v_0)$.

Максимальное удаление от центра графа называется его *радиусом* и обозначается $r(G)$, а любая кратчайшая цепь от центра до наиболее удаленной от него вершины - *радиальной цепью*.

<u>Замечание.</u> Граф может иметь более одного центра. Например, в полном неориентированном графе, в котором две любые различные вершины соединены ребром, радиус равен единице, а любая вершина является центром.

Пусть G - конечный, связный граф, число рёбер которого равно k. Из соображений, изложенных при изучении комбинаторики, можно сделать очевидный вывод. Количество последовательностей рёбер этого графа конечно и равно $k!$. Следовательно, конечно и количество простых цепей, в которых рёбра не повторяются.

<u>Определение.</u> *Протяжённостью* $g(v_m, v_n)$ называется максимальная из длин связывающих эти вершины простых цепей.

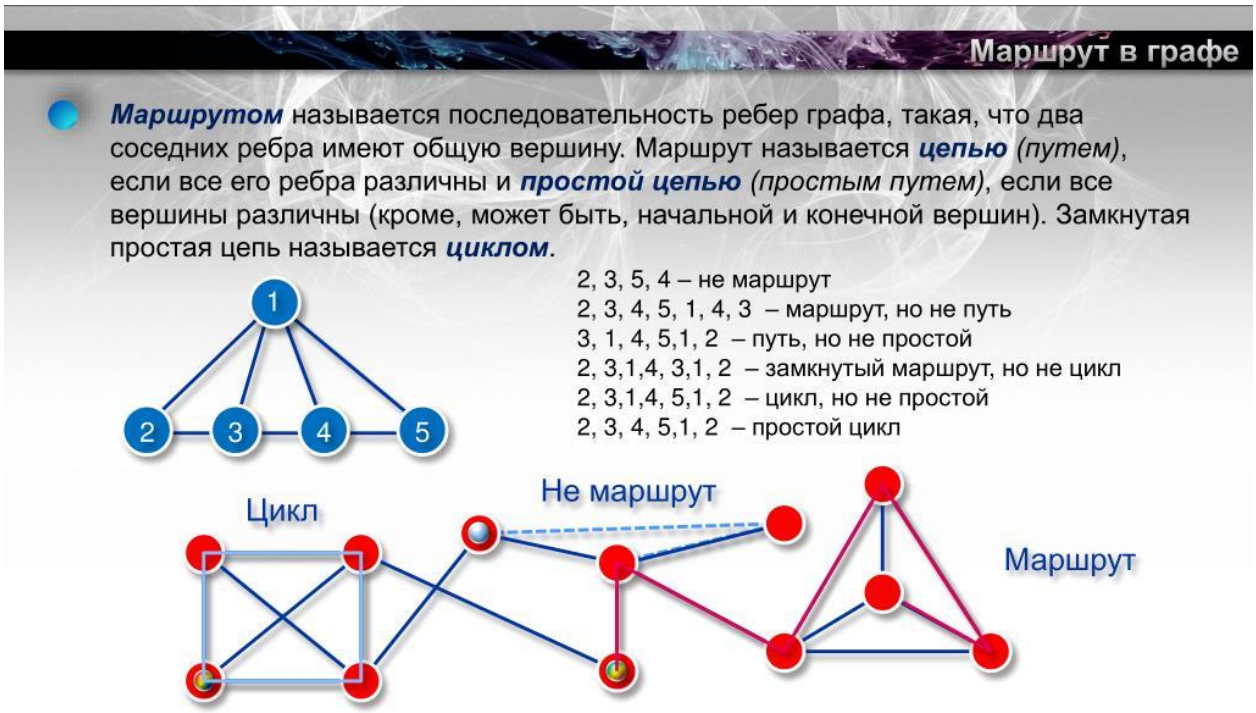


Рисунок 1

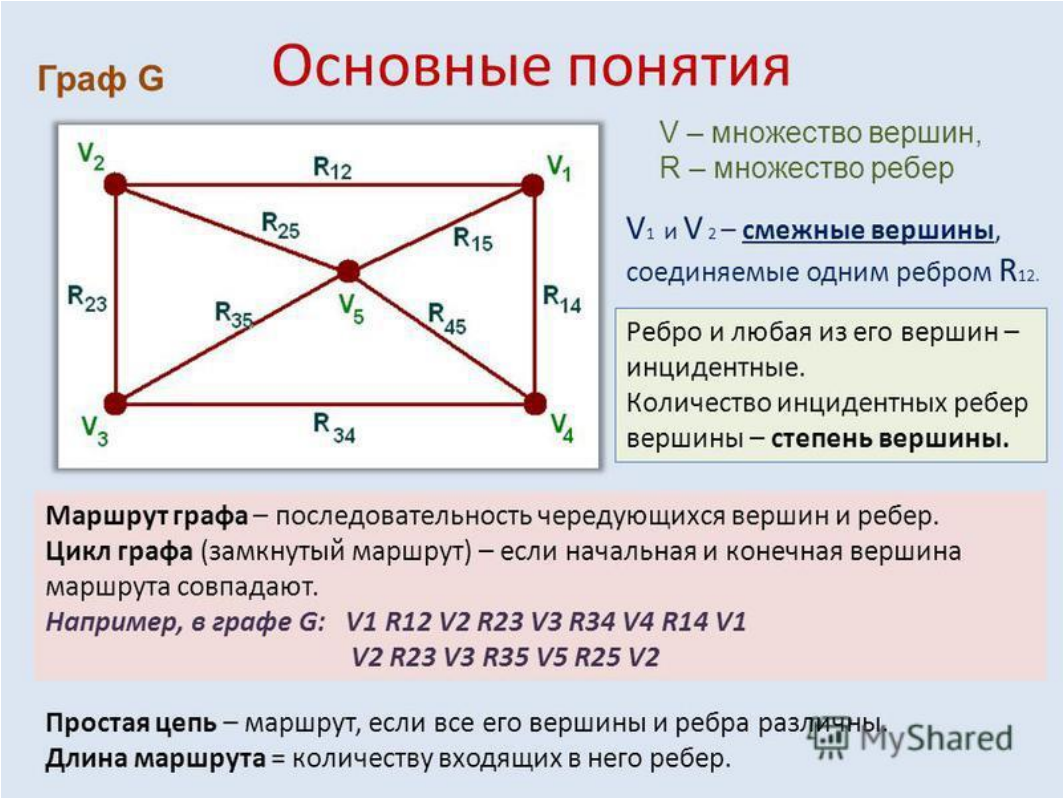
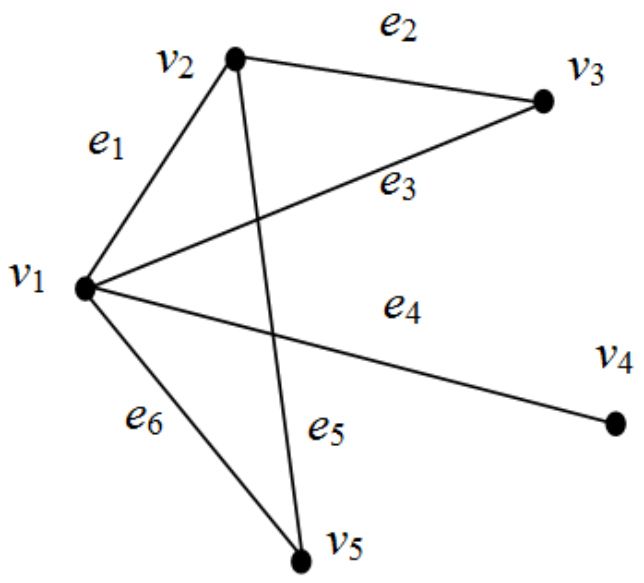


Рисунок 2

Рисунок 3



$G(V, E)$ – граф

$v_1e_1v_2e_2v_3e_3v_1e_1v_2e_5v_5$ или

$v_1v_2v_3v_1v_2v_5$ – маршрут

$v_1v_2v_3v_1v_5$ – цепь

$v_1v_3v_2v_5$ – простая цепь

$v_1v_3v_2v_5v_1$ – простой цикл

Рисунок 4