Задание

1. Изучить теоретический материал темы, законспектировать, ответить письменно на контрольные вопросы.

2. Фотоотчет и сообщение присылать на электронную почту

С уважением, Хвастова Светлана Ивановна

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721389311 (ватсап). Электронная почта: xvsviv@rambler.ru

Лекция на тему: «Операции над частями графа и графами»

Цель: Изучить какие действия можно выполнять с частями графов

СОДЕРЖАНИЕ

- Операции над графами
- Дополнение графа
- Объединение
- Пересечение
- Кольцевая сумма
- Соединение
- Произведение
- Композиция
- Удаление ребра
- Добавление вершины
- Добавление ребра
- Стягивание подграфа А в вершину
- Замыкание или отождествление вершин
- Подразбиение ребра

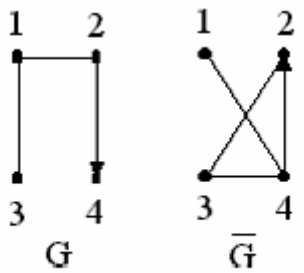

Рисунок 18.1

1. Дополнение графа

Дополнение графа $G(V,E)$ до полного графа $\overline{G} = (V, \overline{E} = \{e \in V \times V \mid e \notin E\})$ (рис. 18.1).

Обратите внимание на стрелки !!!

2. Объединение графов

$G_1 \cup G_2 = G(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ (рис. 18.2).

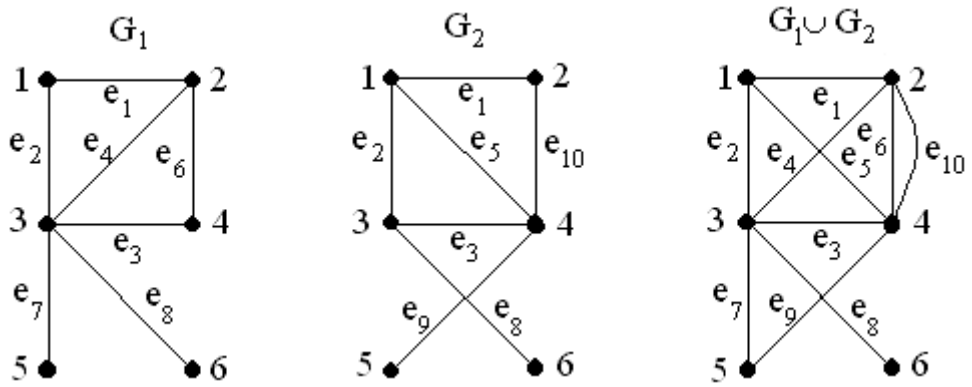

Рисунок 18.2

Обратите внимание – ребра e_6 и e_{10} – это разные связи вершин 2 и 4 (разные дороги между населенными пунктами 2 и 4).

Примечание.

В следующих двух операциях участвуют графы $G_1(V_1,E_1)$ и $G_2(V_2,E_2)$, показанные на рис. 18.2.

3. Пересечение графов

$G_1 \cap G_2 = G(V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$ (рис. 18.3)
при условии $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing, E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$.

4. Кольцевая сумма графов

$G_1 \oplus G_2 = G(V = V_1 \cup V_2,\ E = E_1 \oplus E_2 = E_1 \backslash E_2 \cup E_2 \backslash E_1)$ (рис. 18.4).

Замечание. Операции 3.2 – 3.4 коммутативные бинарные операции, но могут быть расширены на большее число графов.

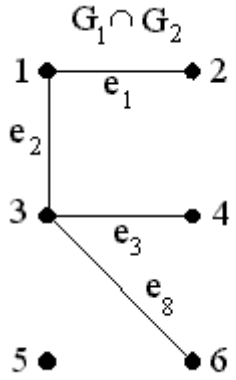

Рисунок 18.3

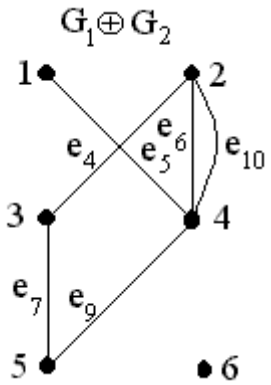

Рисунок 18.4

5. Соединение графов

$G_1 + G_2 = G(V=V_1 \cup V_2,\ E=E_1 \cup E_2 \cup \{e=(v_1,v_2) \mid v_1 \in V_1 \wedge v_2 \in V_2\})$ рис. 18.5.

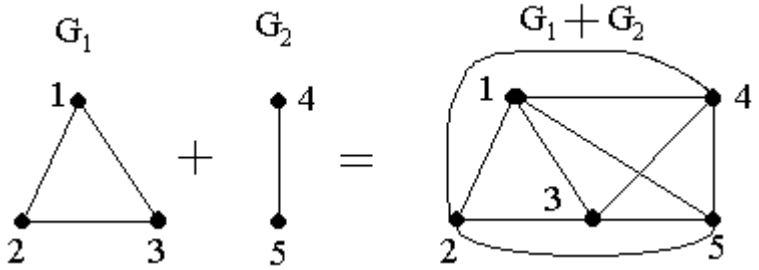

Рисунок 18.5

6. Произведение графов

$G_1 \times G_2 = G(V,E)$, где $V = V_1 \times V_2$,

$E = \{(a_1b_1, a_2b_2) \in E, \forall (a_1 = a_2) \wedge (b_1,b_2) \in E_2 \vee \forall (b_1 = b_2) \wedge (a_1,a_2) \in E_1\}$.

В произведении графов вершины обозначаются парами *ab*, где символы *a* и *b* – обозначения вершин в G_1 и G_2 соответственно.

Пример (рис. 18.6). Ребро $(1x,1y) \subset E$, так как первые символы совпадают (1 = 1), а в G_2 есть ребро (x,y). Аналогично и для других ребер.

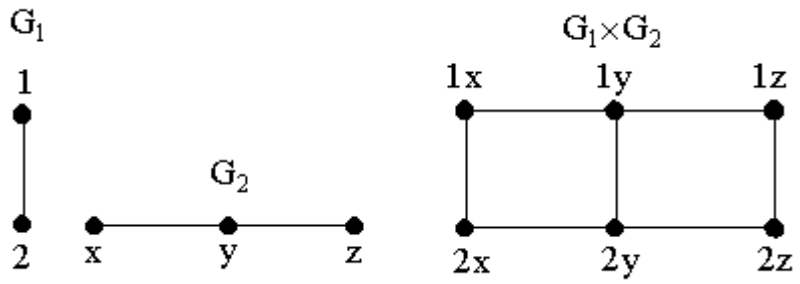

Рисунок 18.6

Неформально: Произведение $G_1 \times G_2$ означает, что каждая вершина G_1 заменяется на копию $Ga = G_2$, а каждая вершина G_2 заменяется на копию $Gb = G_1$.

7. Композиция графов

$G_1[G_2] = G(V = V_1 \times V_2,$

$E = \{(a_1b_1, a_2b_2) \in E, \forall (a_1 = a_2) \wedge (b_1,b_2) \in E_2 \vee \forall\ (a_1,a_2) \in E_1\})$.

В композиции графов, как и в произведении графов, вершины обозначаются парами *ab*, где символы *a* и *b* – обозначения вершин в G_1 и G_2 соответственно.

Пример (рис. 18.7).

Неформально: Композиция $G_1[G_2]$ означает, что каждая вершина G_1 заменяется на копию $Ga = G_2$, а затем, если $(a_1,a_2) \in E_1$, то между любыми вершинами b_1 из Ga_1 и b_2 из Ga_2 проводится ребро (дуга) (b_1,b_2).

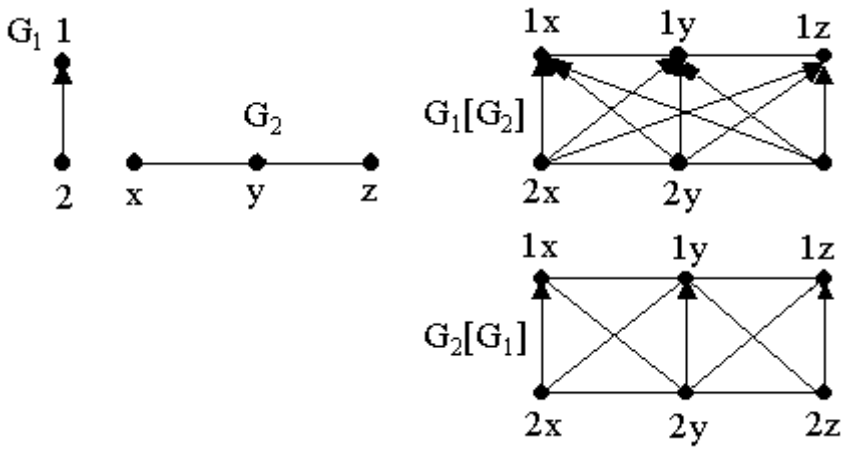

Рисунок 18.7

8. Разность графов

$G_1(V_1,E_1)\backslash G_2(V_2,E_2) = G(V_1\backslash V_2, E)$,

где $E = \{[x^1,x^2] | \ x^1,x^2 \in V_1\backslash V_2 \wedge [x^1,x^2] \in E_1 \wedge [x^1,x^2] \notin E_2\}$

Задание. Приведите пример самостоятельно.

9. Удаление вершины

$G(V,E)\backslash\{x_i\}$.

Из графа удаляется вершина вместе с инцидентными ребрами.

В результате получается подграф, содержащий все ребра инцидентные множеству $V\backslash\{x_i\}$.

10. Удаление ребра

$G\backslash\{e_i\}$

Удаляется ребро, но при этом сохраняются концевые вершины, получается часть графа.

11. Добавление вершины

К заданному множеству вершин $\{x_1, x_2,..., x_k\}$ добавляется новая вершина x, смежная с $x_1, x_2, ... , x_k$.

$G(V_1,E_1) + \{x\} = G(V_1 \cup \{x\}, E = E_1 \cup (x,x_i), x_i \in V_1), \quad \{x\} \notin V_1$.

12. Добавление ребра

Для заданной пары вершин x, y добавляется ребро e.

$G(V_1, E_1) + \{e\} = G(V_1, E = E_1 \cup \{e\}), \quad \{e\} \notin E_1$.

13. Стягивание подграфа А в вершину

В результате выполнения этой операции получается граф

$G(V_1, E_1) = G(V, E)/A, \quad A \subset V$,

$V_1 = V\backslash A \cup \{x\}$,

$E_1 = E\backslash\{e = [x_1,x_2] | \ x_1, x_2 \in A\} \cup \{e = [x,u] | \ u \in \Gamma(A)\backslash A\}$.

$\Gamma(A)$ – множество вершин, смежных с вершинами A.

14. Замыкание или отождествление вершин

Вершины x_i и x_j отождествляются (рис. 18.8), т.е. они заменяются одной новой вершиной, при этом все ребра, инцидентные x_i и x_j, становятся инцидентны новой вершине.

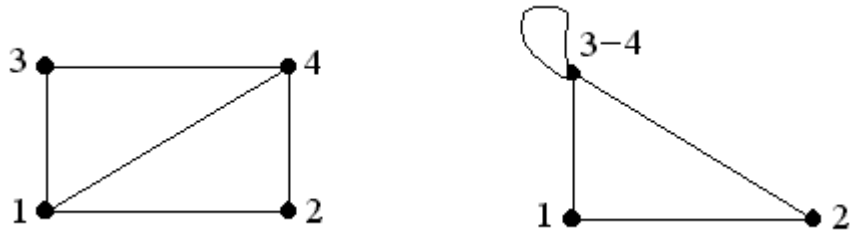

Рисунок 18.8

15. Подразбиение ребра

Удаляется заданное ребро $u = [x, y]$ и добавляется вершина z и цепь (x, u_1, z, u_2, y).

На рис. 18.9 показано выполнение операций Объединение, Пересечение, Разность и Кольцевая разность над элементарными графами в виде двух вершин и ребра или дуги, соединяющих их.

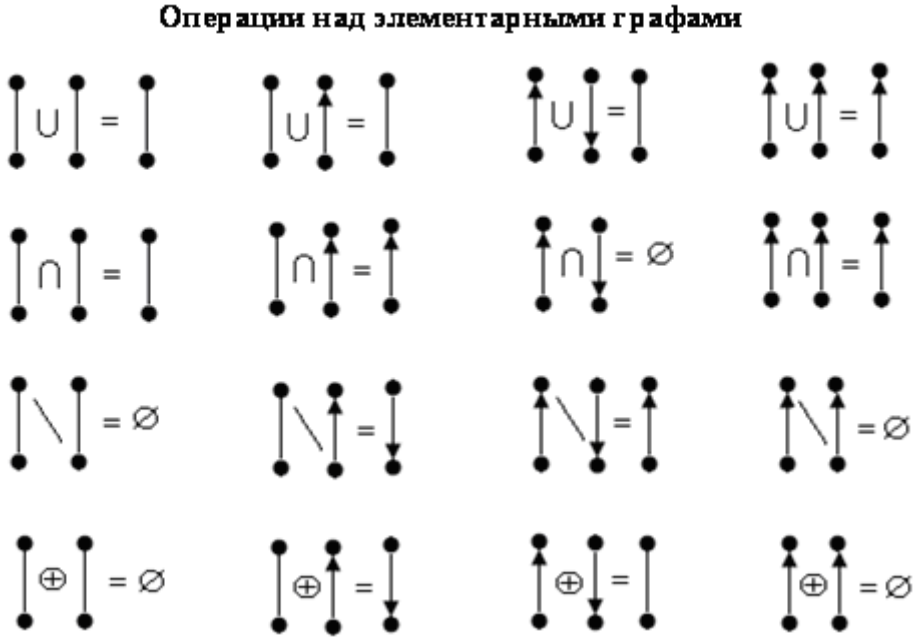

Рисунок 18.9

Вопросы для контроля

1. Что такое дополнение графа и как оно определяется? Приведите математическое представление и графический пример дополнения графа.
2. Как выполняются операции объединения и пересечения графов? Приведите примеры.
3. Приведите примеры определения результата выполнения кольцевой суммы и разности над графами.

4. Выполните операции 2 – 8 над двумя графами на двух вершинах, в одном из которых вершины соединены ребром, а в другом дугой. Для операций, у которых результат зависит от местоположения графа в формуле, приведите два варианта решения.
5. Поясните, как выполняется операция стягивания подмножества вершин в одну вершину.
6. Поясните, как выполняется подразбиение ребра.