Задание

1. Изучить теоретический материал темы, законспектировать, ответить письменно на контрольные вопросы.

2. Фототчет присылать на электронную почту до следующей пары

С уважением, Хвастов Александр Николаевич

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721098278 (ватсап). Электронная почта: hvastov@rambler.ru

Лекция на тему: «Применение методов дифференциального исчисления для исследования функции на монотонность, экстремум, выпуклость графика функции, для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции. Асимптоты графиков функций.»

План

Экстремумы. Монотонность.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей (убывающей)* на множестве X, если для любых $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 \leq x_2$ следует неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$). Возрастающая или убывающая функция называется *монотонной*. Функция $y = f(x)$ называется *строго возрастающей (строго убывающей)* на множестве X, если для любых $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$). Строго возрастающая или строго убывающая функция называется *строго монотонной*.

Теорема. Пусть $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b), и $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для любой точки x этого интервала. Тогда $f(x)$ возрастает (убывает) на (a, b). Верно и обратное утверждение.

Доказательство. Если $x_1 < x_2$, то по теореме Лагранжа найдется точка $c \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$ такая, что $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. В силу того, что $f'(c) \geq 0$ и $x_2 - x_1 > 0$ имеем: $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, т.е. $f(x_2) \geq f(x_1)$. □

Точка a называется *критической точкой функции* $f(x)$, если производная $f'(a)$ существует и равна 0. Необходимое условие экстремума может быть сформулировано так: для дифференцируемой функции любая точка локального экстремума является критической. Обратное утверждение неверно как показывает пример кубической параболы $y = x^3$, которая в нуле имеет нулевую производную, т.е. 0 - критическая точка, но эта точка не является экстремальной.

Первое достаточное условие экстремума. Пусть $f(x)$ дифференцируема в окрестности точки a, и производная $f'(x)$ при переходе через точку а меняет знак. Тогда a -- точка экстремума. При этом a -- локальный максимум, если смена знака производной происходит с плюса на минус, и a -- локальный минимум, если знак меняется с минуса на плюс.

Доказательство -- следствие теоремы. □

Второе достаточное условие экстремума. Пусть a -- критическая точка дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$. Если $f''(a) > 0$, то a -- локальный минимум. Если же $f''(a) < 0$, то a -- локальный максимум.

Доказательство. Если $f''(a) > 0$, то $f''(x) > 0$ в некоторой достаточно малой окрестности точки a (пользуемся непрерывностью второй производной). Тогда по теореме производная $f'(x)$ возрастает в этой окрестности. С учетом равенства $f'(a) = 0$ это влечет, в частности, то, что $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку a. Первое достаточное условие экстремума тогда утверждает, что a -- локальный минимум. Второй случай разбирается аналогично. □

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b). Поставим задачу о вычислении наибольшего и наименьшего значения функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Напомним, что они существуют согласно теореме Вейерштрасса.

Теорема. Пусть $x_1, x_2, x_3, \ldots$ -- все критические точки функции $f(x)$ на интервале (a,b). Тогда

$$\max\{f(x) \mid x \in [a,b]\} = \max\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots\} \quad (1)$$

и

$$\min\{f(x) \mid x \in [a,b]\} = \min\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots\}$$

Доказательство. Пусть в точке $c \in [a,b]$ функция $f(x)$ достигает наибольшего значения (см. теорему Вейерштрасса). Если $c \neq a$ и $c \neq b$, т.е. $c \in (a,b)$, то $f'(c) = 0$ по теореме Ферма. Седовательно, $c = x_i$ для какого-либо i, и равенство (1) следует. Если же с совпадает с одной из концевых точек отрезка $[a,b]$, то равенство (1) тривиально.

Выпуклость и вогнутость

График дифференцируемой на интервале I функции $f(x)$ называется *выпуклым вверх* или просто выпуклым (*выпуклым вниз или вогнутым*), если он лежит ниже (выше) касательной, проведенной в любой точке (см. рис).

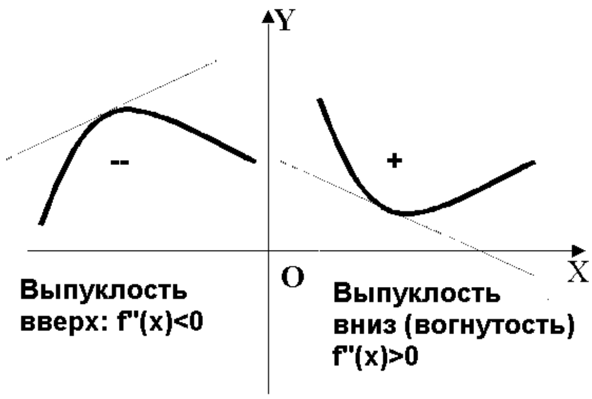


Рис. Выпуклость и вогнутость

Так как уравнение касательной в точке $(a, f(a))$, $a \in I$ есть $y = f(a) + f'(a)(x-a)$, то условие выпуклости будет таким:

$$f(x) \leq f(a) + f'(a)(x-a), \quad \forall\ x, a \in I \qquad (2)$$

Условие вогнутости будет следующим:

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a), \quad \forall\ x, a \in I$$

Достаточное условие выпуклости. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале I и $f''(x) \geq 0$ для любой точки $x \in I$. Тогда график этой функции вогнут на интервале I. Если же $f''(x) \leq 0$ для любой $x \in I$, то график функции $f(x)$ выпукл.

Доказательство. Рассмотрим лишь случай $f''(x) \geq 0$. Докажем неравенство (2), убедившись, что разность левой и правой части неотрицательна:

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) &= f'(c)(x-a) - f'(a)(x-a) \\ &= \big(f'(c) - f'(a)\big)(x-a) = f''(d)(c-d)(x-a) \qquad (3) \end{aligned}$$

Точки $c \in (a; x)$ и $d \in (a; c)$ для которых верно (3) гайдутся согласно теоремы Лагранжа. Если $x > a$, то $c > d$. Если же $x < a$, то и $c < d$. В любом случае $(c-d)(x-a) > 0$. Тогда и все произведение в правой части (3) будет неотрицательным. □

Определение. Точка, при переходе через которую график функции меняет выпуклость, называется *точкой перегиба*.

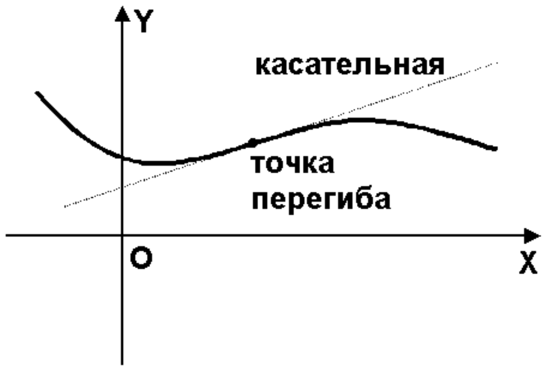


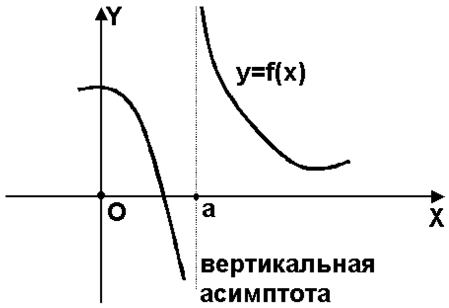
Рис. Точка перегиба

Другое определение точки перегиба: a -- точка перегиба дифференцируемой функции $f(x)$, если график функции $f(x)$ лежит по обе стороны от касательной (или, иначе, переходит с одной стороны касательной на другую), проведенной к графику этой функции в точке $(a, f(a))$ (см. рис.).

Асимптоты

Прямая ℓ называется *асимптотой* кривой γ, если $\rho(P, \ell) \to 0$ при условии $P \to \infty$, $P \in \gamma$ (см. рис.).

Асимптоты графика функции $y = f(x)$ бывают вертикальные, т.е. задающиеся уравнением $x = a$ и наклонными, т.е. те прямые, которые задаются уравнением $y = kx + b$.



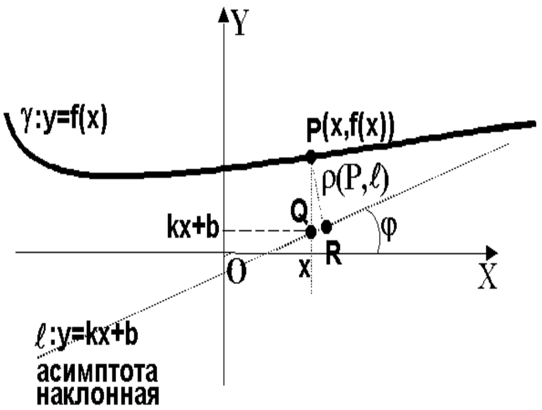


Рис. Асимптоты

Теорема. Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой тогда и только тогда, когда либо $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty$, либо $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty$ (см. рис.).

Прямая $y = kx + b$ будет наклонной асимптотой к графику функции $y = f(x)$ на $+\infty$ (на $-\infty$), если и только если существуют следующие пределы

$$k = lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = lim_{x\to +\infty} (f(x) - kx)$$

Доказательство. Из $M(x, f(x)) \to \infty$ и $N \in \gamma$ вытекает $x \to +\infty$. Тогда при $x \to +\infty$ имеют место эквивалентности:

$$\rho = |f(x) - kx - b| cos\, \varphi \to 0 \Leftrightarrow \mathrm{f(x) - kx - b} \to 0 \Leftrightarrow \mathrm{b} = \lim_{\mathrm{x}\to +\infty} (f(x) - kx)$$

Отсюда следует $b + \alpha\,(x) = f(x) - kx$ для некоторой б.м. α (x). Тогда

$$\frac{b}{x} + \alpha\,(x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{f(x)}{x} - k$$

и $k = lim_{x\to +\infty}\ f(x)/x.$