**Задание**

1. Изучить материал лекции, законспектировать.
2. Фотоотчет присылать на электронную почту

С уважением, Хвастова Светлана Ивановна

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721389311.

Электронная почта: xvsviv@rambler.ru

## *1. Ориентированные графы.*

Понятие ориентированного графа (орграфа) было определено ранее. Сейчас рассмотрим подробнее, как выглядят в таком графе пути и циклы.

Пусть дан ориентированный граф $G(V,E)$. Каждое ребро имеет начало $v_m \in V$ и конец $v_n \in V$; также говорят, что данное ребро выходит из вершины $v_m$ и входит в вершину $v_n$.

Дадим определение пути в ориентированном графе. Сразу оговоримся, что это понятие можно определять различными способами; мы приводим только один.

**Определение.** Путь из вершин и рёбер – это такая последовательность рёбер и вершин графа $L=(v_1,e_1,v_2,e_2,\ldots,e_k,v_{k+1})$, в которой вершина $v_i$ является началом $i-$ го ребра, а вершина $v_{i+1}-$ его концом. Вершина $v_0$ называется началом пути $L$, вершина $v_{k+1}-$ его концом, число рёбер $k-$длиной пути.

Путь, состоящий из одной вершины, имеет нулевую длину. Каждому пути $L$ ненулевой длины взаимно однозначно соответствует последовательность $\tilde{L}=(e_1,\ldots,e_k)$ рёбер этого пути. Её называют *путём из рёбер*. Такое понятие пути – аналог соответствующего понятия для неориентированного графа. Наконец, для графа, не содержащего кратных рёбер, можно указать взаимнооднозначное соответствие с последовательностью $\hat{L}=(v_1,\ldots,v_{k+1})$ вершин пути. В зависимости от ситуации удобнее использовать тот или иной способ обозначения пути.

**Определение.** Путь $L=(v_1,e_1,v_2,e_2,\ldots,e_k,v_{k+1})$ называется *ориентированным циклом*, если состоит более, чем из одного элемента, и его начало совпадает с его концом.

Начало цикла обычно не фиксируется, иначе говоря, все пути, получающиеся друг из друга циклическими сдвигами – это один и тот же цикл. Определение простого ориентированного цикла аналогично соответствующему определению для неориентированного цикла – это цикл, в котором каждая вершина инцидентна ровно двум его рёбрам. Любой граф, содержащий циклы, можно “укоротить” до простого. Граф, не содержащий циклов, называется ациклическим.

**Определение.** Вершина ориентированного графа называется начальной, если в неё ни входит ни одно ребро и конечной, если из неё не выходит ни одно ребро.

Во всяком ациклическом графе есть хотя бы одна начальная и хотя бы одна конечная вершина. Максимальным рангом $R(v_0)$ вершины ориентированного графа называется максимальная из длин путей этого графа с концом в вершине $v_0$. Ранг вершины равен нулю тогда и только тогда, когда вершина является начальной. Если же через вершину проходит какой-нибудь цикл, то $R(v_0) = +\infty$
.

Пусть вершины конечного ориентированного графа пронумерованы от 1 до $n$. Нумерация вершин называется правильной на ребре $e(v_i, v_j)$, если $i < j$ и правильной на графе $G$, если она правильна на всех его рёбрах. Правильная нумерация вершин графа возможна только в том случае, если он ациклический.

Понятия длины путей, протяжённости и расстояния между вершинами определяются для ориентированного графа так же, как для неориентированного графа.

## *2. Взвешенные графы*

Определим понятие взвешенного (помеченного) графа. При этом сопоставим каждой вершине $v_i \in V$ графа G =<V,E> некоторый вес $w_i \in W$, а каждому ребру $e_i \in E$ также сопоставим некоторый вес $p_i \in P$.

Т.о., получим граф, содержащий взвешенные вершины ($v_i$,$w_i$) и взвешенные ребра ($e_i$, $p_i$), т.е. граф G =<(V,W),(E,P)>.

Строго говоря, G представляет собой уже не граф, а функцию, определенную на вершинах и ребрах графа, т.е. если $f:V \to W$, $g:E \to P$, то G = <f,g>.

*Пример.* В графе помеченными могут быть только вершины, или только ребра, или и вершины и ребра (Рис. 1).

Взвешенный граф полностью определяется матрицей инцидентности матрицами весов:

$$S_v = \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_{|V|} \end{vmatrix} \quad \text{и } S_E = \begin{vmatrix} p_1 000\dots0 \\ 0p_2 00\dots0 \\ \dots\dots \\ 0000\dots p_{|E|} \end{vmatrix}$$

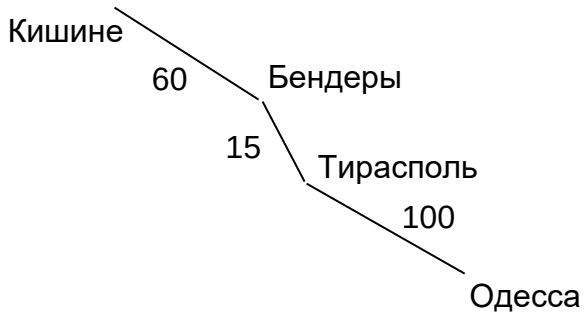



**Рис. 1. Пример взвешенного графа.**

*Поиск остовного дерева минимальной длины во взвешенном графе.*

Данный алгоритм (Алгоритм Крускаля) применяется при разработке различных коммуникационных сетей. Суть его состоит в том, чтобы сумма весов ребер полученного дерева была минимальной.

Пусть дан граф G с помеченными ребрами.

1. Выбирают ребро с минимальным весом.
2. Из оставшихся выбирают ребро с минимальным весом.
3. Проверяют, не образует ли выбранное ребро цикла с выбранными ранее ребрами. Если да, то отбрасывают его и переход к п 4 . Если нет, то включают его в отобранную совокупность ребер.
4. Если не все вершины графа еще связаны, то повторяем все действия, начиная с п.2. В противном случае – конец алгоритма.

*Пример:* В заданном взвешенном графе (Рис. 2) выделить остовное дерево минимальной длины.

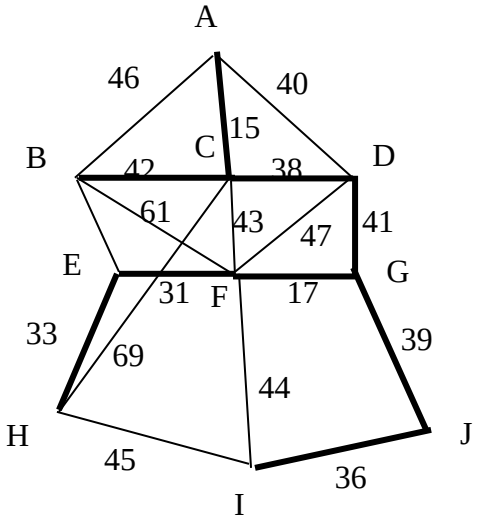



**Рис..2.**

Ребра расположены в порядке возрастания следующим образом: AC, FG, EF, EH, IJ, CD, GJ, AD, DG, BC, CF, FI, HI, AB, BE, FD, BF, CH. Алгоритм Крускаля позволяет последовательно сохранять ребра AC, FG, EF, EH, IJ, CD,CJ, а ребро AD исключается, т.к. оно образовывало бы цикл с уже включенными в дерево ребрами AC и CD. Затем добавляются ребра DG и BC. Как можно заметить, все вершины уже связаны и минимальное дерево получено.

## *3: Планарные графы*

**Определение:**. Граф G называется *планарным,* если он может быть изображен на плоскости таким образом, чтобы его ребра не пересекались. Такой рисунок называется *картой графа* (Рис.3)

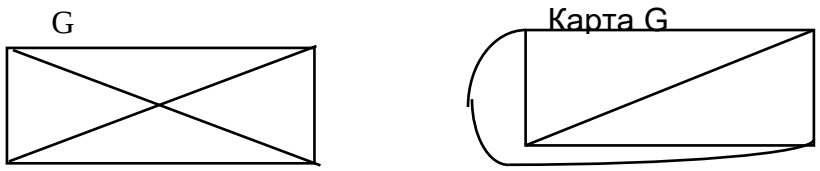



**Рис.3.**

Графы $K_5$ и $K_{3,3}$ не являются планарными (Рис.4).

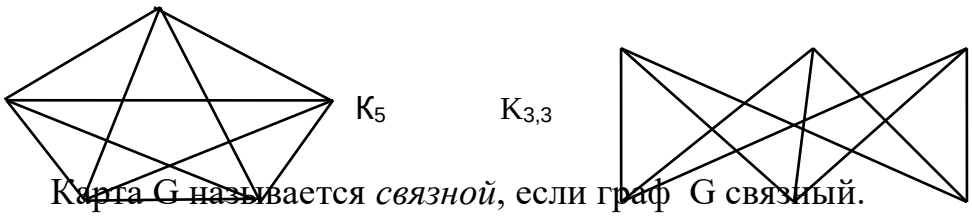


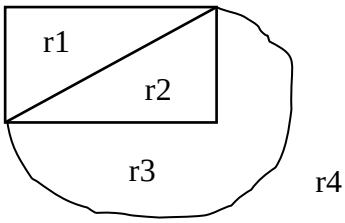

**Рис 4.**

Карта G называется *связной*, если граф G связный.

Каждая картина делит плоскость $R^2$ на области, ограниченные и неограниченные.

Множество таких областей обозначаются через R.

**Теорема (Эйлера):** Для произвольной связной карты выполняется равенство : IVI+IRI - IEI = 2 (Рис.5).




4 + 4 - 6 =2

**Рис.5.**

Каждая область карты ограничена замкнутым маршрутом .

**Определение :** Пусть G=<V,E> - планарный граф. Для карты G определим Δr - степень области r, как длину замкнутого маршрута, ограничивающего область r.

Для графа, изображенного на рис. 1, имеем:

$\Delta r_1=3$ $\Delta r_3=3$

$\Delta r_2=3$ $\Delta r_4=3$

Имеют место следующие соотношения:

$$\sum_{r\in G} \Delta r=2\,|E|$$

если $|V|\geq 3$, то $|E|\leq 3|V| - 6$

$6\leq 3*4-6$

$6\leq 6$

Рассмотрим операцию *стягивания* графа G как слияние двух смежных вершин после удаления ребра между ними.

Граф называется стягиваемым к G’, если G’ может быть получен из G путем последовательного выполнения элементарных стягиваний.

**Теорема (Куратовского):**. Граф является планарным, тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, стягиваемых к $K_5$ и $K_{3,3}$.

**Определение :** *Раскраской* графа G называется задание цвета вершинам таким образом, что если вершины v и w- смежные, $v,w \in V$, то они имеют различные цвета.

Величина $\chi(G)$ называется *хроматическим* числом графа G и равна минимальному числу цветов, необходимых для раскраски графа.

Граф G называется *p-хроматическим*, если его вершины можно раскрасить p различными цветами.

Одно-хроматический граф – тривиальный граф. Дву-хромотический граф тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечетной длины.

**Теорема:** Для любого планарного графа G хроматическое число не более 4.

Пусть M - карта графа G. Определим карту M' следующим образом: внутри каждой области карты M выберем внутреннюю точку. Если две области имеют общее ребро, то между выбранными внутренними точками проведем дугу. Этот процесс определяет карту M', называемую *двойственной* карте M' (Рис. 6).

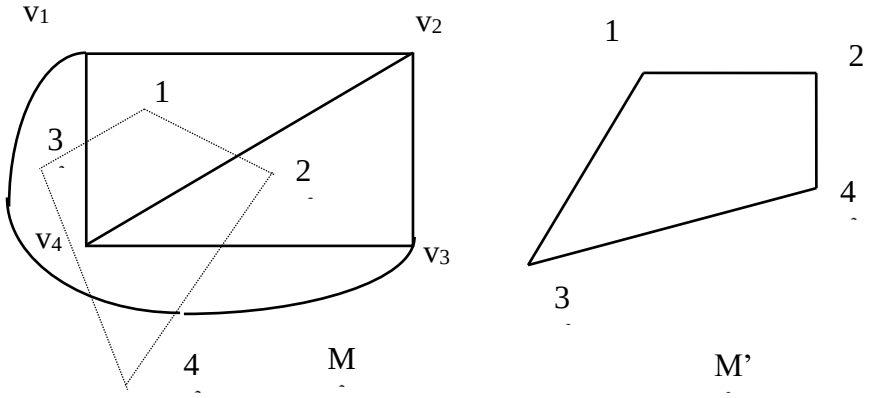



**Рис. 6.**

Раскраска карты M' соответствует раскраске областей карты M т.о., что области, имеющие общее ребро, имеют разные цвета.

**Теорема:** Если области карты M необходимо раскрасить таким образом, чтобы смежные области имели различные цвета, то необходимо не более 4-х цветов.

*Толщиной* графа G называется наименьшее число планарных графов, объединение которых дает G. Толщина планарного графа равна 1. Нижняя оценка толщины t(G) графа G=<V,E> определяется неравенством:

$$t(G)\geq 1+\left]\frac{\sum_{i=1}^{n}\rho_i-2}{6(n-2)}\right[$$ , где ] [ -целая часть, |V|=n, $\rho_i$ – степень i-ой вершины.

### *4: Задача поиска маршрутов (путей) в графе (орграфе)*

Рассмотрим алгоритм поиска маршрута в связном графе G=<V, E>, соединяющего вершины $v,w\in V$ причем $v\neq w$.

*Алгоритм Тэрри:*

*Если, исходя из вершины v и осуществляя последующий переход от каждой доступной вершины к смежной ей вершине, следовать следующим правилам 1-4, то всегда можно найти маршрут в связанном графе, соединяющим две заданные вершины.*

**Правило 1:** Идя по произвольному ребру, отмечать направление, в котором оно было пройдено.

**Правило 2:** Исходя из некоторой вершины v' всегда следовать только по тому ребру, которое не было пройдено или пройдено в противоположном направлении.

**Правило 3:** Для всякой вершины v'≠v отмечать первое заходящее в v' ребро, если v′ встречается в первый раз.

**Правило 4:** Исходя из некоторой вершины v'≠v по первому заходящему в v' ребру идти лишь тогда, когда нет другой возможности.

*Пример:*

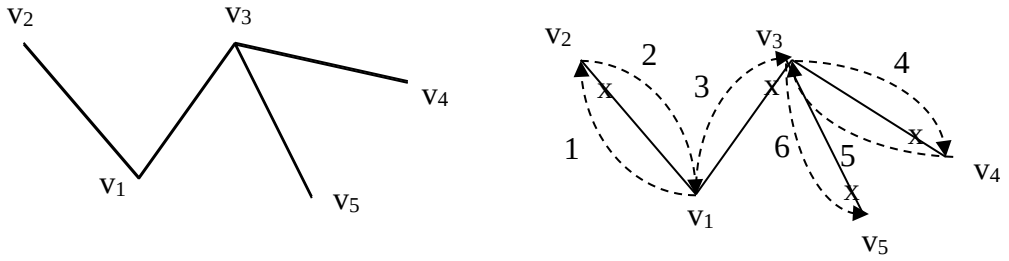



**Рис. 7**. а) б)

Найти маршрут из $v_1$ в $v_5$ (рис.7)

Знаком × помечены первые заходящие в вершины ребра возле той вершины, в которую это ребро заходит. По рисунку видно, что маршрут имеет вид: $v_1\ v_2\ v_1\ v_3\ v_4\ v_3\ v_5$.

После того как из $v_1$ зашли в $v_3$ по правилу 4 в $v_1$ вернуться не можем, т. к. имеются другие возможности, а ребро $v_1v_3$ является первым заходящим в $v_3$ ребром. После того как из $v_4$ зашли в $v_3$ по дуге 5 по правилу 2 в $v_4$ вернуться не можем, а в силу правила 4 не можем идти и к $v_1$, остается идти к $v_5$.

**Замечание 1:** Алгоритм Тэрри остается в силе, когда G связный граф.

**Замечание 2:** Если G не связный псевдограф, то с помощью алгоритма Тэрри, исходя из любой вершины v и помечая пройденные вершины и ребра, можно выделить компоненту связанности псевдографа, содержащую вершину v. Алгоритм закончит свою работу, когда в первый раз невозможно будет выполнить правило 2, т. е. пришли в вершину u такую, что все инцидентные ей ребра пройдены в направлении из u, при этом получим, что u = v.

**Замечание 3:** Из полученного с помощью алгоритма Тэрри маршрута всегда можно выделить простую цепь, соединяющую v и w.

Контрольные вопросы:

1. Дайте понятие ориентированного графа.

2. Как по другому называют ориентированный граф?
3. Дайте определение пути в ориентированном графе? Цепи?
4. Определение взвешенного графа.
5. Как по другому называют взвешенный граф?
6. Как применяют алгоритм Крусталя?
7. Какой граф называется планарным?
8. Раскраской графа называется?
9. Где применяется алгоритм Тэрри?