Задание:

- Изучить теорию;
- Написать краткий конспект;
- Разобрать примеры решения;
- Ответить на вопросы;
- По вопросам обращаться 072-1098278 или hvastov@rambler.ru
- Фотоотчёт конспекта прислать в течении 3 дней со дня получения задания на hvastov@rambler.ru

Лекция №9

Тема: Основные понятия комбинаторики. Перестановки. Размещения. Сочетания.

Цель: Ознакомиться с основными понятиями комбинаторики. Изучить перестановки, размещения и сочетания.

План:

1.Основные понятия комбинаторики.

2. Перестановки.

3. Размещения.

4. Сочетания

В нашу современную жизнь
вторгается математика с её
особым стилем мышления
становящимся сейчас обязательным и
для инженера и для биолога.
Б.В. Гнеденко

1. При решении ряда теоретических и практических задач требуется из конченого множества элементов по заданным правилам составлять различные комбинации и производить подсчёт числа всех возможных таких комбинаций. Такие задачи называются комбинаторными.

Комбинаторные задачи – это задачи, в которых изучаются различного рода соединения (комбинаций), составные из конечного числа элементов, по определённому правилу.

Раздел математики, занимающейся решением таких задач, называется комбинаторикой. Этот раздел математики находит широкое практическое применение во многих вопросах естествознания и техники. Комбинаторика применяется в теории вероятности, теории массового обслуживания, теории управляющих систем и вычислительных машинах.

2. Рассмотрим задачу: Сколькими способами можно расставить рядом на полке 4 различные книги?

Решение. На первое место можно наставить любую из 4-х книг, на второе – любую из 3-х оставшихся, на третье – любую из 2-х оставшихся и на четвёртое – последнюю оставшуюся книгу. Применяя последовательно правило произведения, получим 4*3*2*1=24. Книги можно поставить 24 способами.

Определение. Перестановками из n элементов называются соединения, которые состоят из одних и тех же n элементов и отличаются одно от другого только порядком их расположения.

Число перестановок из n элементов обозначают Pn (P – первая буква французского слова permutation – перестановки) и читают «n энное»

Формула числа перестановок

Pn=n! (читается n факториал.)

Pn=n(n-1)(n-2)…3*2*1=1*2*3…*(n-1)*n

Задача. Сколькими способами можно положить 6 различных открыток в 6 конвертов. (по одной в конверте).

Решение задачи сводится к нахождению числа перестановок из 6 элементов.

P6=6!=1*2*3*4*5*6=720;

Ответ: 720 способами.

3. Задача. Сколько различных двухзначных чисел можно записать с помощью цифр 1,2,3,4 при условии, что в каждой записи нет одинаковых цифр?

Решение. Перебором убедимся в том, что из четырёх цифр 1,2,3,4 можно составить 12 двухзначных чисел, удовлетворяющих целостно!

(12,13,14,21,23,24,31,32,34,41,42,43)

В записи на первом месте может стоять любая из данных четырех цифр, а на втором – любая из трёх оставшихся. По правилу произведения таких чисел 4*3=12.

При решении задачи из четырёх данных элементов по два в каждом, причём они отличались либо составом элементов (12 и 24), либо порядком их расположения (12 и 21). Такие соединения называют размещениями.

Определение. Размещениями из n элементов по m (n >=m) называются такие соединения, каждое из которых содержит m элементов, взятых из данных n разных элементов, и которые отличаются одно от другого либо самими элементами, либо порядком их расположения.

Формула для вычисления A_n^m – числа размещений из n по m элементов.

$A_n^m = n*(n-1)(n-2)\ldots*(n-m+1)$.

Например: $A_5^3 = 5*4*3=60$; $A_4^2 = 4*3=12$;

Решить уравнение: $A_n^2 =56$; $n*(n-1)=56$.

$n^2-n-56=0$; n1=8; n2=-7 (не удовл.)

Задача. Сколькими способами можно обозначить вектор, используя буквы A,B,C,D,E,F?

Решение: В условии задачи 6 букв. Для обозначения вектора используем две. $A_6^2 =6*5=30$.

Ответ: 30 способами.

Задача 1

Покупатель из имеющихся в питомнике 10 саженцев хочет выбрать 2. Сколькими способами он может это сделать?

Пусть x – число всевозможных пар саженцев, выбираемых из 10 имеющихся. Если бы в выбираемой паре был важен порядок расположения саженцев, выбираемых из 10 имеющихся. Если бы в выбираемой паре был важен порядок расположения саженцев, то таких пар было бы в 2 раза больше числа x, т. е. 2x. Но число упорядоченных пар из любых элементов, выбираемых из 1 имеющихся различных элементов, равно ^{A} . Таким образом, 2x=$^{A_{10}}$, т. е. 2x =90, откуда x = 45.

Ответ 45 способами.

При решении этой задачи из 10 саженцев были образованы пары – соединения по 2 саженца, которые отличались друг от друга только составом. Такие соединения называют сочетаниями.

Определение. 6 из m элементов по n в каждом (n ≤ m) называются соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых из данных m разных элементов, и которые отличаются одно от другого по крайней мере одним элементом.

Число всевозможных сочетаний из n различных элементов по n элементов обозначают C_m^n(C- первая буква французкого слова combination сочетание) и читают «це из эм по эн». При решении задачи 1 было установлено, что $C_{10}^2 = 45$.

Выведем формулу для подсчёта числа сочетаний из m различных элементов по n элементов в каждом.

Образуем все соединения, содержащие n элементов, выбранных из данных m разных элементов, без учёта порядка их расположения. Число таких соединений равно C_m^n.

Из каждого полученного соединения перестановками его элементов можно образовать P_n=n! соединений, отличающихся одно от другого только порядком расположения элементов. Тем самым получим все размещения из m элементов по n, число которых равно A_m^n. По правилу произведения, число таких соединений равно C_m^n *P_n.Итак, C_m^n *$P_{n=}A_m^n$, откуда

$$c_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}.$$

Например,

Заметим, что если m=n, то $\mathbf{c_n^n}$ =

Учитывая, что при m≥n и $\mathbf{P_n}$ =, формулу (1) можно представить в виде $C_m^n = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}$, где m≥n.

Например, $C_7^4 = \frac{7!}{(7-4)! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$

Задача 2

Сколько существует способов выбора двух карт из колоды в 36 карт?

Изымаемые из колоды всевозможные пары карт без учёта порядка их расположения в наборе образуют сочетания из 36 по 2. По формуле (2) находим $C_{36}^2 = \frac{36!}{(36-2)! \cdot 2!} = \frac{36!}{34! \cdot 2!} = \frac{35 \cdot 36}{2} = 35 \cdot 18 = 630$

Ответ 630 способов.

Рассмотрим два свойства сочетаний, которые в ряде случаев упрощают вычисления при решении задач.

Свойство 1. $C_m^n = C_m^{m-n}$.

По формуле (2) имеем

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!},$$

$$C_m^{m-n} = \frac{m!}{(m-(m-n))! \cdot (m-n)!} \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!},$$

т. е. $C_m^n = C_m^{m-n}$.

Свойство 2 (рекуррентное свойство).

$$C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}.$$

Воспользуемся соотношением (1):

$C_1m^tn + C_1m^t(+1) = (A_1m^tn)/P_1n + (A_1m^t(n+1))/P_1(n+1) = (m(m-1) - (m-(n-1)))/m! + (m(m-1) - (m-(n-1))(m-n))/(n+$

Найти значение выражения $C_{20}^{18} + C_{20}^{19}$.

Воспользуемся свойством 2, получим $C_{20}^{18} + C_{20}^{19} = C_{21}^{19}$. По формуле (2) имеем $C_{21}^{19} = \frac{21!}{(21-19)! \cdot 19!} = \frac{21!}{2! \cdot 19!} = \frac{21!}{2! \cdot 19!} = \frac{20 \cdot 21}{2} = 210.$

Ответ 210.

Контрольные вопросы:

1) Какие задачи называются комбинаторными?
2) Дать определение перестановок? Размещений?
3) Записать формулы для нахождения перестановок и размещений.
4) Что называется сочетанием