Практическая работа№14. Минимальный путь (маршрут) во взвешенном орграфе (графе)..

Цель проведения занятия: получение навыков при решении задач нахождения пути в графе.

После выполнения работы студент должен

знать: типы задач на нахождение путей в графе;

уметь: находить пути в графе.

Материально-техническое оснащение рабочего места: инструкционные карты, конспект.

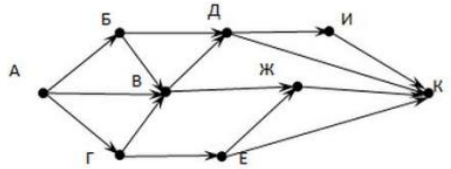
Инструктаж по технике безопасности

Рекомендованная литература:

1. Спирина М.С., Дискретная математика: Учебник для студ. Учреждений сред. проф. образования / М.С.Спирина, П.А.Спирин. –М.: Издательский центр «Академия», 2004. –368 с.
2. Александров А. В. и др. Прикладные алгоритмы на графах. Учебное пособие, ВлГУ, 2005
3. Харари Фрэнк. Теория графов / Харари Фрэнк ; Пер. с англ. В.П.Козырева; Под ред. Г.П.Гаврилова. - 4-е изд. - М. : URSS : Либроком, 2009. - 296 с
4. Битюцкий В. П. Электронный учебник: Дискретная математика / http://ait.ustu.ru/uploaded/materialy-po-disciplinam/discret-mathematics/el_ucheb/index.htm
5. Справочные данные по математике: Элементы теории графов. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://book.itep.ru/10/grap1021.htm, свободный. – Загл. с экрана.

<u>Содержание и порядок выполнения задания</u>

Задание 1. На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К?



Решение (1 вариант, подстановки):

1) начнем считать количество путей с конца маршрута – с города К

2) будем обозначать через N_X количество различных путей из города А в город Х

3) общее число путей обозначим через N

4) по схеме видно, что $N_Б = N_Г = 1$

5) очевидно, что если в город Х можно приехать только из Y, Z, то $N_X = N_Y + N_Z$, то есть нужно сложить число путей, ведущих из А во все города, откуда можно приехать в город Х

6) поскольку в К можно приехать из Е, Д, Ж или И, поэтому $N = N_К = N_Д + N_Е + N_Ж + N_И$

7) в город И можно приехать только из Д, поэтому $N_И = N_Д$

8) в город Ж можно приехать только из Е и В, поэтому $N_Ж = N_Е + N_В$

9) подставляем результаты пп. 7 и 8 в формулу п. 6: $N = N_В + 2N_Е + 2N_Д$

10) в город Д можно приехать только из Б и В, поэтому $N_Д = N_Б + N_В$ так что $N = 2N_Б + 3N_В + 2N_Е$

11) в город Е можно приехать только из Г, поэтому $N_Е = N_Г$ так что $N = 2N_Б + 3N_В + 2N_Г$

12) по схеме видно, что $N_Б = N_Г = 1$, кроме того, $N_В = 1 + N_Б + N_Г = 3$

13) окончательно $N = 2N_Б + 3N_В + 2N_Г = 2\cdot1 + 3\cdot3 + 2\cdot1 = 13$

14) Ответ: 13.

Решение (2 вариант, удобная форма записи):

1) начнем считать количество путей с конца маршрута – с города К

2) записываем для каждой вершины из каких вершин можно в нее попасть

вершина	откуда?
К	ИДЖЕ
И	Д
Ж	ВЕ
Е	Г
Д	БВ
Г	А
В	АБГ
Б	А

К ← ИДЖЕ
И ← Д
Ж ← ВЕ
Е ← Г
Д ← БВ
Г ← А
В ← АБГ
Б ← А

3) теперь для удобства «обратного хода» вершины можно отсортировать так, чтобы сначала шли все вершины, в которые можно доехать только из начальной точки А:

вершина	откуда?	N
Б	А	1
Г	А	1
В	АБГ	3
Е	Г	1
Д	БВ	4
Ж	ВЕ	4
И	Д	4
К	ИДЖЕ	13

Б ← А Г ← А

затем на каждом шаге добавляем те вершины, в которые можно доехать из уже добавленных в список (и из исходной точки):

В ← АБГ Е ← Г

далее добавляем все вершины, куда можно доехать из А, Б, Г, В и Е:

Д ← БВ Ж ← ВЕ

на следующем шаге добавляем вершину И: И ←Д

и, наконец, конечную вершину К ←ИДЖЕ именно в таком порядке будем вычислять количество путей для каждой вершины. Такая процедура называется *топологической сортировкой графа*.

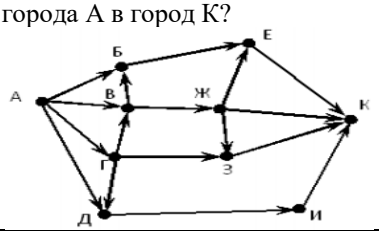
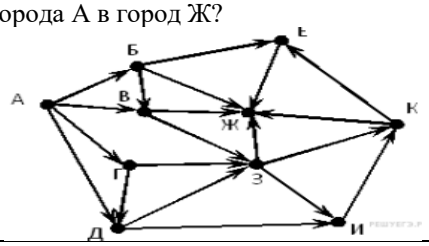
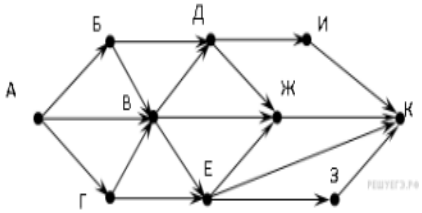
4) теперь идем по полученному списку вершин, полагая, что количество вариантов попасть в вершину равно суммарному количеству вариантов попасть в ее непосредственных предшественников.

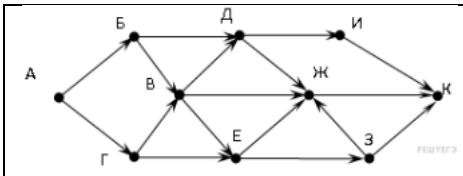
$N_Б = 1$, $N_Г = 1$ $N_В = 1+1+1 = 3$, $N_Е = 1$ $N_Д = 1+3 = 4$, $N_Ж = 3 + 1 = 4$ $N_И = 4$, $N = N_К = 4 + 4 + 4 + 1 = 13$

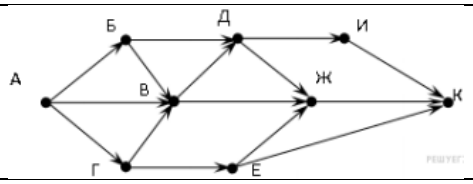
5) заметим, что вершины можно и не сортировать специально, а просто выбирать возможный порядок вычисления: проверять, какие значения известны и какие можно рассчитать с их помощью на следующем шаге. 6) Ответ: 13.

Замечания: очень важна аккуратность и последовательность; сначала идем от конечной точки к начальной, выписывая все вершины, из которых можно приехать в данную; затем идем обратно, определяя числовые значения построение полного дерева маршрутов.

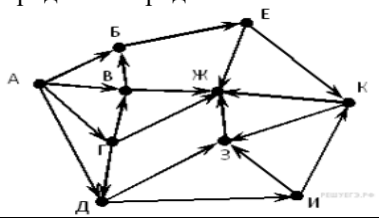
Задани2 (по вариантам).

1 . На рисунке — схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К? 	2. На рисунке — схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город Ж?
3. На рисунке — схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город Ж? 	4. На рисунке — схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К? 
5. На рисунке — схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К?	6. На рисунке — схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К?

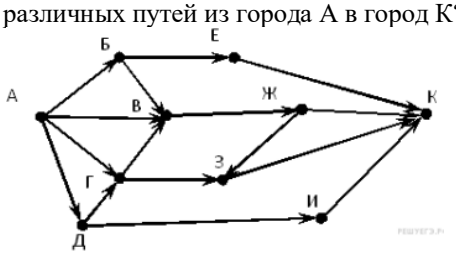




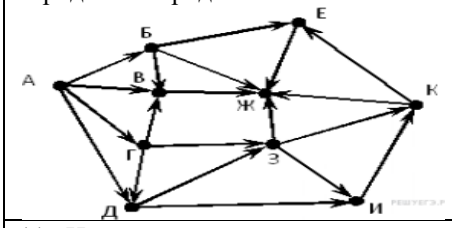
7. На рисунке — схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город Ж?



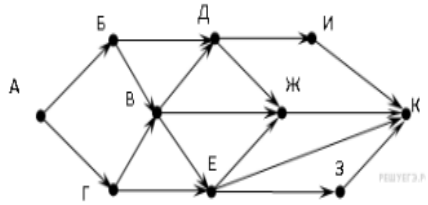
8. На рисунке — схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К?



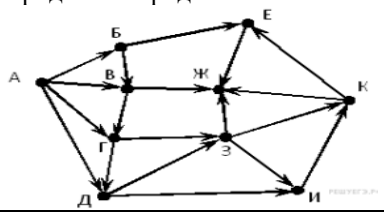
9. На рисунке — схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город Ж?



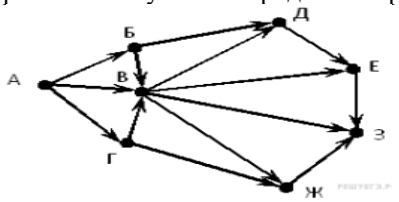
10. На рисунке — схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К?



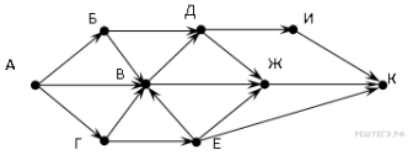
11 . На рисунке — схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город Ж?



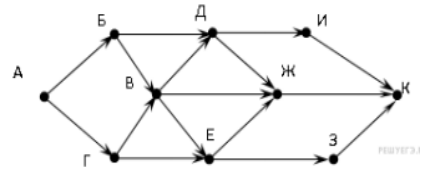
12. На рисунке — схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город З?



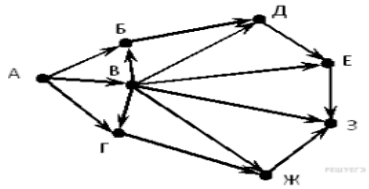
13. На рисунке — схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К?



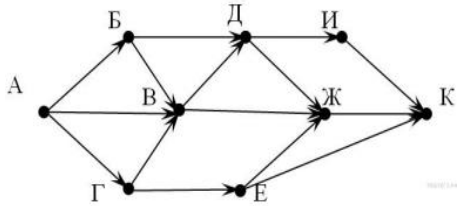
14. На рисунке — схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К?



15. На рисунке — схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город З?

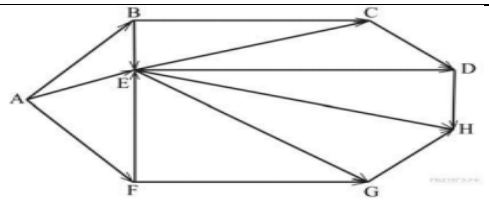


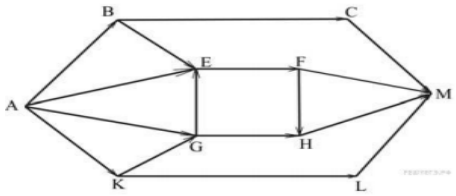
16. На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город Ж?



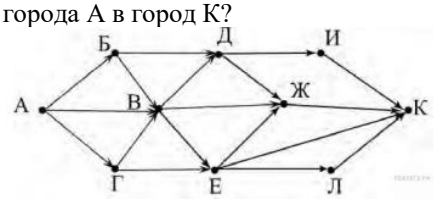
17. На рисунке – схема дорог, связывающих города А, В, С, D, E, F, G H. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город Н?

18. На рисунке – схема дорог, связывающих города А, В, С, D, E, F, G, H, K, L, M. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город М?

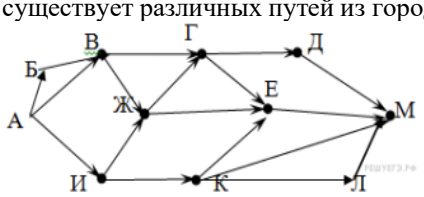




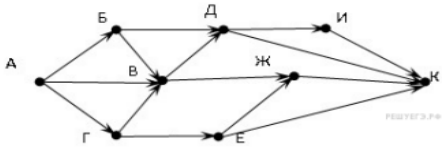
19. На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К, Л. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К?



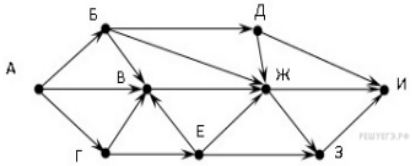
20. На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К, Л, М. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город М?



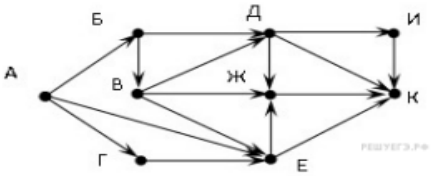
21. На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К?



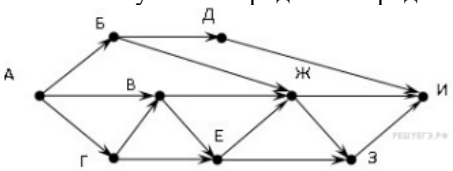
22. На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город И?



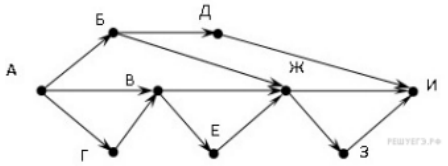
23. На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К?



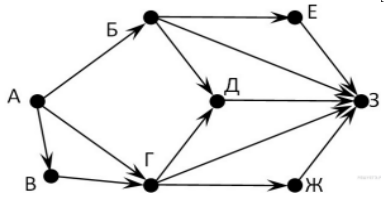
24. На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город И?



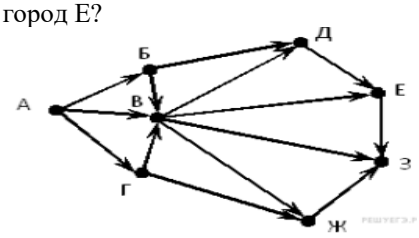
25. На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город И?



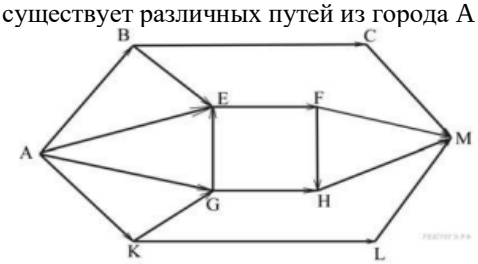
26. На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город З?



27. На рисунке — схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город Е?

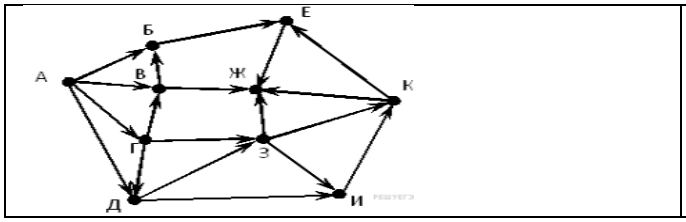


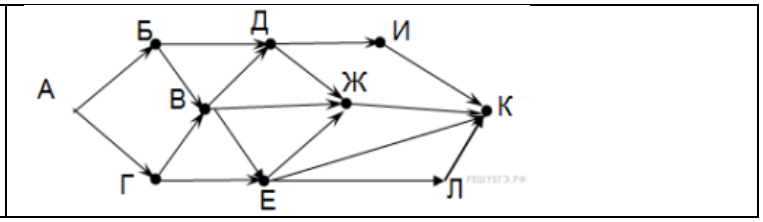
28. На рисунке – схема дорог, связывающих города А, В, С, D, Е, F, G, H, K, L, M. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город Е?



29. На рисунке — схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И, К. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город З?

30. На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К, Л. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город К?





Вопросы для самоконтроля:

1. Перечислите типы задач на поиск путей в графе.
2. Какие существуют два вида алгоритма поиска путей в графе?
3. В чем заключается идея алгоритма поиска пути «в глубину»?
4. В чем заключается идея алгоритма поиска пути «в ширину»?
5. В чем заключается идея алгоритма поиска пути в данной практической работе?

Краткие сведения по теоретической части работы

В основе построения большинства алгоритмов на графах лежит систематический перебор вершин графа, при котором каждая вершина просматривается в точности один раз, а количество просмотров ребер графа ограничено заданной константой (лучше – не более одного раза).

Один из основных методов проектирования графовых алгоритмов – это поиск (или обход графа) в глубину (depth first search, DFS), при котором начиная с произвольной вершины v_0, ищется ближайшая смежная вершина v, для которой в свою очередь осуществляется поиск в глубину (т.е. снова ищется ближайшая, смежная с ней вершина) до тех пор, пока не встретится ранее просмотренная вершина, или не закончится список смежности вершины v (то есть вершина полностью обработана). Если нет новых вершин, смежных с v, то вершина v считается использованной, идет возврат в вершину, из которой попали в вершину v, и процесс продолжается до тех пор, пока не получим $v = v_0$. Иными словами, поиск в глубину из вершины v основан на поиске в глубину из всех новых вершин, смежных с вершиной v. В алгоритме поиска в ширину (breadth first search, BFS). Обработка вершины v осуществляется путем просмотра сразу всех новых соседей этой вершины. При этом полученный путь является кратчайшим путем из одной вершины в другую.

Методические рекомендации по выполнению и оформлению

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета о занятии:

1. Тема.
2. Цель.
4. Практическое задание.
5. Ответ на 1 контрольный вопрос (по указанию преподавателя).